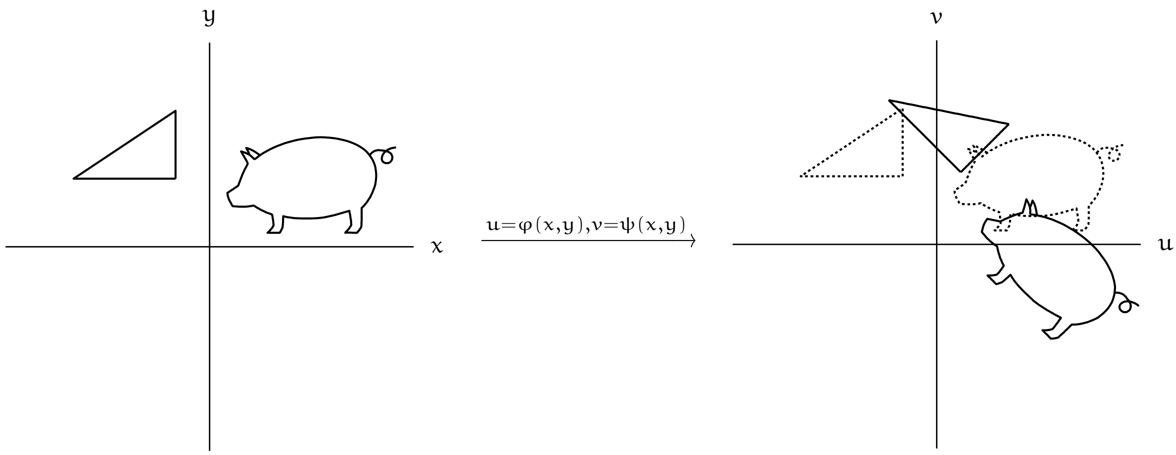
⋆ 変数変換の例 (レポートの問 5. 参照のこと)

(a) $u = x\cos\theta - y\sin\theta,\ v = x\sin\theta + y\cos\theta\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$
原点の周りを反時計回りに θ だけ回転させる変換である (下図は $\theta = -\frac{\pi}{4}$).
これを行列で表すと,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

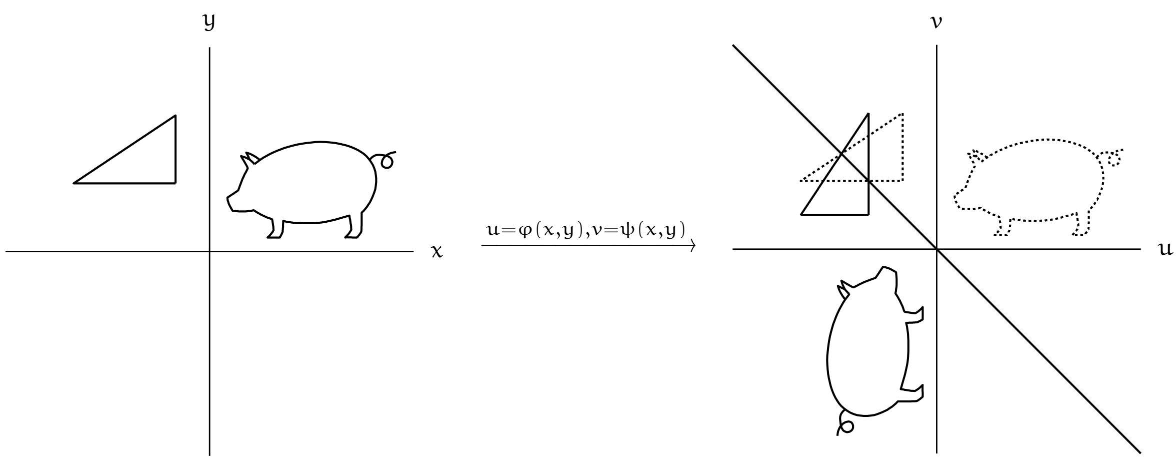


(b) $u = x - \dfrac{2\alpha(\alpha x + \beta y)}{\alpha^2 + \beta^2},\ v = y - \dfrac{2\beta(\alpha x + \beta y)}{\alpha^2 + \beta^2}\ (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})$

ベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ と直交する直線 $\alpha x + \beta y = 0$ に対し対称に移す変換で (下図は $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, レポートでは $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$), これを鏡映変換という.

これをベクトルで表すと, $\mathbf{U} = \mathbf{X} - \dfrac{2\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}} \boldsymbol{w}$, ここで, $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
これも行列の形にかける (計算してみよう) :

$$\begin{pmatrix} u \\ \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} & -\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \\ -\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} & \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}$$



(c) $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. ただし，$E = \left\{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\right\}$, $D = \left\{(u, v) \mid v > 0\right\}$.
これを複素座標平面 $z = x + iy$ で考えると，$f(z) = z^2$ と表せられ，原点の周りを回りながら，原点方向に向かって伸縮するような変換となる．また，この変換は図形の角度を保つため，等角写像と呼ばれる．実際，三角形は変換後 歪んではいるが，角度は変わっていない．
また，上の二例とは違い，行列で表わすことはできない．