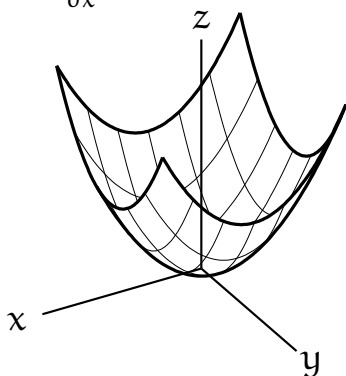


★ 極値を取る最も簡単な関数の例: $f(x, y) = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)$

$ax^2 + bxy + cy^2$ の形の多項式を 2 次形式という。ここでは、関数 $f(x, y) = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)$ ($A, B, C \in \mathbb{R}, (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$) の原点の周りでの様子を調べる。

原点 $(0, 0)$ において、 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ となる。また、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = B, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C$ となり、
 $\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = AC - B^2$

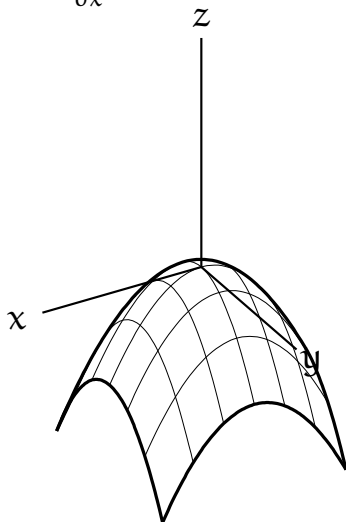
(i) $\Delta > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A > 0$ のとき



$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{A}{2} \left(x + 2\frac{B}{A}xy \right) + \frac{C}{2}y^2 \\ &= \frac{A}{2} \left(x + \frac{B}{A}y \right)^2 + \frac{\Delta}{2A}y^2 \end{aligned}$$

と変形できるから、 $f(x, y) > f(0, 0) = 0$ が成り立つ。すなわち、 f は原点 $(0, 0)$ で極小。

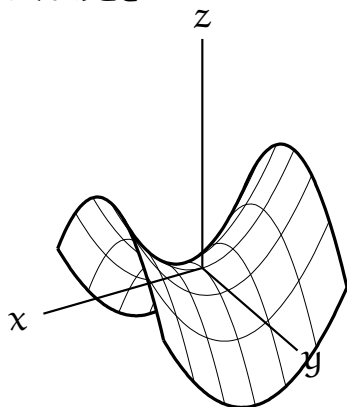
(ii) $\Delta > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = A < 0$ のとき



$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{A}{2} \left(x + 2\frac{B}{A}xy \right) + \frac{C}{2}y^2 \\ &= \frac{A}{2} \left(x + \frac{B}{A}y \right)^2 + \frac{\Delta}{2A}y^2 \end{aligned}$$

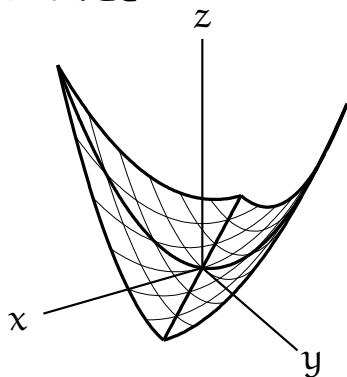
と変形できるから、 $f(x, y) < f(0, 0) = 0$ が成り立つ。すなわち、 f は原点 $(0, 0)$ で極大。

(iii) $\Delta < 0$ のとき

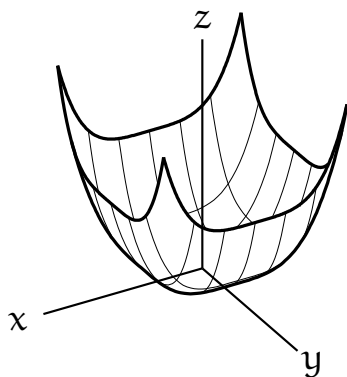


図の通り、曲面は馬の鞍のような形になり、原点 $(0, 0)$ で極値を取らない。

(iv) $\Delta = 0$ のとき



原点 $(0, 0)$ で極値を取らないが、一般の関数 $f(x, y)$ については、極値を取る場合も取らない場合もある。



$f(x, y) = x^4 + y^4$ は、 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ で、 $\Delta = 12x^2 \cdot 12y^2$ は原点 $(0, 0)$ で $\Delta = 0$ となる。図から見てわかる通り、原点 $(0, 0)$ で f は極小となる。