演習問題　2015/07/13

---

1. $f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とする。極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ に対し、合成関数 $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を考えるとき、次が成り立つことを確かめよ。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right)^2$$

(これを簡略化して $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$ とも書く)

2. $f(x,y) = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ の点 $(1,1)$ のおける 2 次多項式近似を求めよ。

3. 次の領域 D 上の関数 $f(x,y)$ を考える。

   (1) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$　　(2) $f(x,y) = (x^2 - y)e^{2x-y}$

   (3) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y$

   それぞれの関数について、次の問いに答えよ。

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ を満たす点 (a,b) をすべて求めよ。

   (b) (a) で求めた点 (a,b) が極小点・極大点かどうか判定せよ。また、極値を求めよ。

(期末試験範囲外ですが、時間が空いたら解いてみてください)

　A を対角成分がすべて 0 となっている n 次下三角行列とする。すなわち、$a_{ij} = 0\ (i \le j)$ となる n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ である。このとき、次で定義される行列 B が正則行列であることを示し、逆行列 B^{-1} を A を用いて表わせ。

$$B = E_n + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k A^k = E_n - A + A^2 - A^3 + \cdots$$

ただし、E_n を n 次単位行列、行列 A^k を $A^{k+1} = AA^k\ (k \ge 1)$ と帰納的に定めるものとする。ヒントは Taylor 展開。

演習問題 略解　**2015/07/13**

---

1. 略

2. 丁寧に偏導関数を計算して，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

これより，点 $(1,1)$ における f の 2 次多項式近似は

$$\begin{aligned} f(x,y) &\fallingdotseq f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)\\ &\qquad+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(x-1)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)(x-1)(y-1)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(y-1)^2\right)\\ &=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)+\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{1}{4}(y-1)^2. \end{aligned}$$

3. (1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=4x^3-4x+4y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=4y^3+4x-4y$ より，$4x^3-4x+4y=4y^3+4x-4y=0$ を解いて，$(x,y)=(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. さらに，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x^2-4$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12y^2-4$ となるから，$\Delta=(12x^2-4)(12y^2-4)-16$. $\Delta(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=20\cdot 20-16>0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=24-4>0$ となるから，点 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ はともに極小点で，$f(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=-8$. 一方，$\Delta(0,0)=0$ となるので，判定法は使えない．そこで，原点 $(0,0)$ を通る直線 $y=kx$ を考えると，$f(x,kx)=(k^4+1)x^4+(-2k^2+4k-2)x^2$ となるから，

$$f(x,0)=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)<0\quad(|x|<\sqrt{2},\ x\neq 0)$$
$$f(x,x)=2x^4>0\quad(x\neq 0)$$

となるから，原点 $(0,0)$ は極点ではない．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2(x^2+x-y)e^{2x-y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-(x^2-y+1)e^{2x-y}$ より，$x^2+x-y=x^2-y+1=0$ を解いて，$(x,y)=(1,2)$. さらに，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(2x^2+4x-2y+1)e^{2x-y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2(x^2+x-y+1)e^{2x-y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(x^2-y+2)e^{2x-y}$ となるから，$\Delta(1,2)=2(2+4-4+1)(1-2+2)-(-2(1+1-2+1))^2=2>0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)=2(2+4-4+1)=6>0$ となるから，点 $(1,2)$ は極小点で，$f(1,2)=-1$.

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-12$ より，$3x^2-3=3y^2-12=0$ を解いて，$(x,y)=(1,2)$, $(1,-2)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$. さらに，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$ となるから，$\Delta=36xy$. $\Delta(\pm 1,\mp 2)<0$ より，点 $(1,-2)$, $(-1,2)$ はともに極値点ではない．また，$\Delta(\pm 1,\pm 2)>0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1,\pm 2)=\pm 6$ より，点 $(1,2)$ は極小点で，$f(1,2)=8$，点 $(-1,-2)$ は極大点で，$f(-1,-2)=8$.