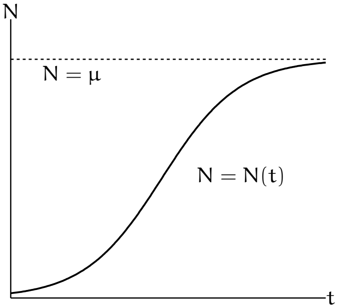
ロジスティック方程式

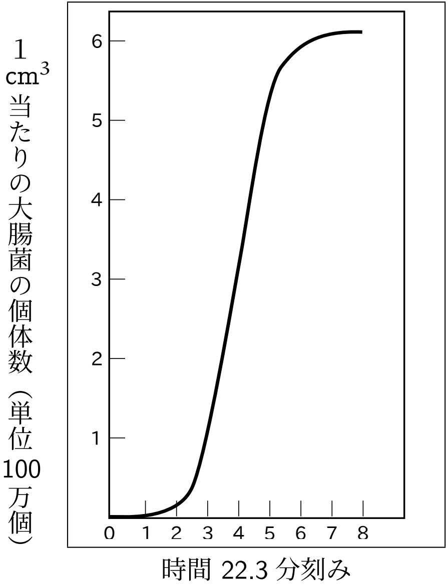
フェルフルスト (Pierre-François Verhulst、1804 年〜1849 年) は人口増加の仕方を説明する数理モデルとして次の方程式 (このような方程式を**微分方程式**という) を提案した：

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N \left(1 - \frac{N}{\mu}\right) \qquad (\gamma,\ \mu > 0 : \text{定数})$$

$N = N(t)$: 時間 t における人口

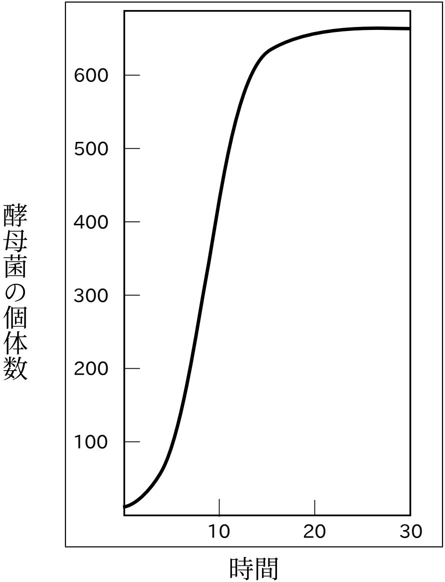


ロジスティック方程式の例



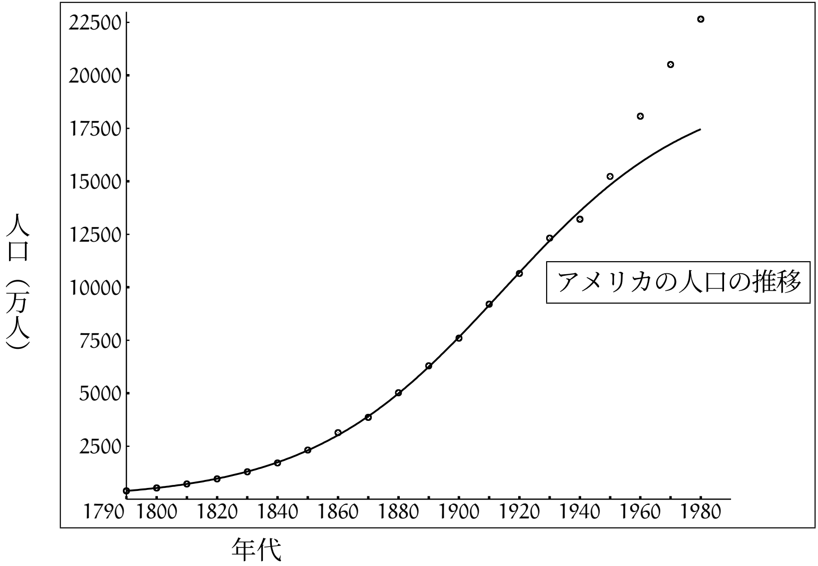
マッケンドリックと
ケサバ・パイによる
37°C に保たれた
ペプトンスープ中の大腸菌の増殖

ロジスティック方程式の例



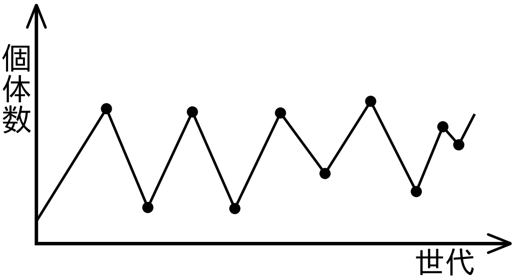
カールソンによる酵母菌の成長

ロジスティック方程式の例



ロジスティック方程式に当てはまらない例

ヨツモンマメゾウムシの個体数の変動 (内田俊郎、1941 年〜)



ロジスティック方程式から漸化式へ (差分化)

- $\Delta t > 0$ を固定して、関数 $N = N(t)$ の飛び飛びの値を取る: $N_n = N(n\Delta t)$ $(n \in \mathbb{N})$
- $\dfrac{dN}{dt} \rightsquigarrow \dfrac{N\bigl(n\Delta t + \Delta t\bigr) - N(n\Delta t)}{\Delta t}$

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N \left(1 - \frac{N}{\mu}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{a_{n+1} = r a_n (1 - a_n)}$$

$$\left(a_n = \frac{\gamma \Delta t}{\mu(1 + \gamma\Delta t)} N_n\right)$$