

注意事項：

- ▷ レポートの回収は6月1日の講義中に行う。締め切り厳守。
- ▷ レポートは **A4 の紙** とし、**レポートの上部に学生番号と名前**を丁寧に書き、**左上をホチキスで止める**こと。
- ▷ 計算結果だけでなく、計算過程も書くように。
- ▷ 以下の問題を答えるにあたり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であることを使ってよい。

1. 逆三角関数 $y = \text{Arcsin } x$, $y = \text{Arccos } x$, $y = \text{Arctan } x$ の導関数を、逆関数の微分の方法を用いて求めよ。(4 点)
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ となることを示せ。(4 点) ($x \geq 1$ に対して、 $n \leq x < n+1$ となる $n \in \mathbb{N}$ を取る。このとき、 $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ となることを示し、これを利用せよ)
3. 次の極限を求めよ。(各 2 点)

(1) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x + 5^x)^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

(4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3x} + 2x$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

(6) $\lim_{x \rightarrow +0} (1 - \cos x^2) \log x$

4. 次の関数を微分せよ。(各 2 点)

(1) $f(x) = e^{x^2}$

(2) $f(x) = \text{Arctan } x^3$

(3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x+3}}$

(4) $f(x) = \frac{xe^x}{x^2 + 1}$

(5) $f(x) = (\cos x^2)^{\frac{2}{3}}$

(6) $f(x) = \sin e^x$

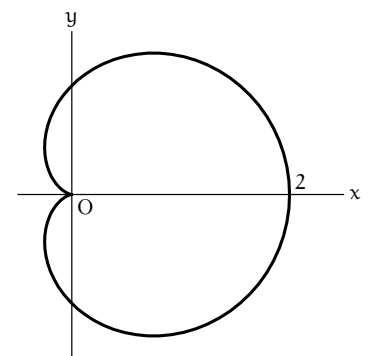
(7) $f(x) = \log(\sqrt{x^2 + 8} - x)$

(8) $f(x) = \log(\text{Arcsin } x)$

(9) $f(x) = \tan(\text{Arccos } x^{-2})$

5. $x(\theta) = (1 + \cos \theta) \cos \theta$, $y(\theta) = (1 + \cos \theta) \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とする。 $x = x(\theta)$, $y = y(\theta)$ で定義される曲線をカーディオイド (cardioid、心臓形) という。点 $(x(\theta), y(\theta))$ における、この曲線の接線の方程式を θ を用いて表せ。(4 点)
6. 次の関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$



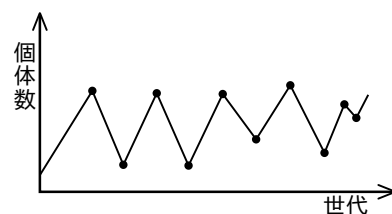
カーディオイド

- (1) 関数 f が $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ。(3 点)
- (2) $x \neq 0$ のときの導関数 $f'(x)$ を求めよ。(2 点)
- (3) $x = 0$ で、 f は微分可能であることを定義に従って示せ。(3 点)
- (4) 導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ で連続か? それとも不連続か? 理由も述べよ。(3 点)
7. (1) 方程式 $x^x - x^4 + 1 = 0$ ($x > 0$) は実数解を持つことを示せ。(3 点)
- (2) n を奇数、 a_i ($1 \leq i \leq n$) を実数とすると、方程式 $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ は実数解を持つことを示せ。(3 点)
8. 平均値の定理を用いて、 $\frac{x}{1+x^2} < \text{Arctan } x < x$ ($x > 0$) を示せ。(4 点)

9. 【個体群生態学における数理モデル】理論物理学から数理生物学へと転向した Robert May が次の数理モデル[†](漸化式)の数値計算を行い、一見単純に見えるこのモデルが r の値により複雑な振る舞いをすることを示した (1973 年) :
 $0 \leq a_1 \leq 1, 0 < r \leq 4$ とし、

$$a_{n+1} = ra_n(1 - a_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

により、数列 $\{a_n\}$ を定義する。これは、数理モデルとして生物の個体数 (の密度) a_n の世代 n ごとの変動を表している。実際に、このモデルと似た現象が生物学者の内田俊郎教授によるヨツモンマメゾウムシの観察 (1941 年～) などにも見られていた。



ヨツモンマメゾウムシの個体数の変動

- (1) $0 \leq a_n \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$) となることを示せ。したがって、 $\{a_n\}$ は有界列である。(3 点) (ヒント: a_n を x 、 a_{n+1} を y とすれば、2 次関数 $y = f(x) = rx(1 - x)$ である。与えられた a_n に対し、 a_{n+1} の取りうる値は?)
 - (2) $\{a_n\}$ が収束するならば、取りうる極限を求めよ。(2 点) (ヒント: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$)
 - (3) $0 < r \leq 1$ とする。このとき、 $\{a_n\}$ は単調減少であることを示せ。また、極限を答えよ。(2 点)
 (ヒント: 以下の問題で、2 次関数 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ のグラフを描いてみる。特に、交点の位置に注意せよ)
 - (4) $1 < r \leq 2$ とする。このとき、
 - (a) $0 \leq a_1 \leq 1 - \frac{1}{r}$ ならば、 $\{a_n\}$ は単調増加であることを示せ。(2 点)
 - (b) $1 - \frac{1}{r} \leq a_1 \leq \frac{1}{2}$ ならば、 $\{a_n\}$ は単調減少であることを示せ。(2 点)
 - (5) $r = 4$ とする。 $0 < a_1 < 1$ と仮定するとき、 $a_1 = \sin^2 \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) と表わすことができる。このとき、一般項 a_n を θ を用いて表わせ。また、 $\{a_n\}$ は収束するか? (3 点) (ヒント: a_2 を計算してみよ)
10. 次で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 4} \quad (n \geq 1)$$

- (1) $\{a_n\}$ が収束するならば、極限 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ はいくつになるか? (2 点)
 - (2) 関数 $f(x) = \sqrt{x+4}$ ($x \geq -4$) が狭義単調増加であることを示せ。(2 点)
 - (3) $\{a_n\}$ が有界単調増加列であることを示せ。(4 点) (ヒント: $a_{n+1} = f(a_n)$, $\alpha = f(\alpha)$)
11. 多項式 $P(x) = 1 + 14x - 5x^2 - x^4 + 2x^5$ を $b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2 + \cdots + b_5(x-1)^5$ ($b_i \in \mathbb{R}$) の形に書け。(3 点)
12. 区間 $[0, 1)$ 上の関数 $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ について、次の問いに答えよ。
- (1) $\log f(x)$ を考えることにより、 $(1-x^2)f'(x) = f(x)$ となることを示せ。(2 点)
 - (2) $f'(x)$ および $f''(x)$ を求めよ。(2 点)
 - (3) $(1-x^2)f'(x) = f(x)$ の両辺を n (≥ 2) 回微分することにより、

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2nx+1)f^{(n)}(x) - n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0 \quad (n \geq 2)$$
 となることを示せ。(3 点)
 - (4) Taylor の定理を利用し、 $f(x)$ の $x = 0$ における多項式近似を x^7 の項まで求めよ。ただし、剰余項 $R_8(x)$ は求めなくて良い。(3 点)
 - (5) (4) の結果を利用して、 $\sqrt{2}$ の近似値を小数点以下第三位まで計算せよ。(2 点) (数値の計算には電卓等を用いて良い)
- (余力のある人は、 $f^{(1)}(0)$, $f^{(2)}(0)$, ... の計算から、数列 $\{f^{(n)}(0)\}$ の一般項を予想し証明してみよ)

[†]数理モデルとは、時間により変化する自然現象などを数式で記述し、その現象の振る舞いを模倣 (近似) した “模型” のことをいう。モデルを作ることによって、その現象の本質を理解し、未来予測の目安を得ることができる。今回は数理モデルとして漸化式のものを取り上げたが、微分を使って記述した方程式 (微分方程式という) の形もたくさんある。微分方程式については、微分積分学 II で紹介する。これらは微分積分学の (ひいては数学の) ひとつの応用である。