レポート課題 略解 2015/06/08

総評：

おおむねよくできていました．平均点は 71.9 点です．微分の計算は正確に計算できるようになりましょう．やや難しい問題も取り上げていますが，だいたいが基本的です．いくつか気になった点をあげます:

- ▷ 問 1. は逆関数の微分の方法を使って，逆三角関数の導関数を計算してもらいました．ただし，他の問題ではこの結果を利用して微分の計算をして欲しかったです．逆三角関数を使った合成関数が必ずしも逆関数を持たないことに注意しましょう．試験では，逆三角関数の導関数を覚えて (または，計算して思い出して)，解答してください．
- ▷ 根号 $\sqrt{\ }$ を含む微分や，商の微分は間違いやすいので注意しましょう．
- ▷ 不定形の極限 ($\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ など) の結果を突然書かれると，解答者が理解して解答しているのか判断できず，採点に困ります．判断の理由をひとことでいいので書いてください．実際に判断に困った箇所は，その旨コメントしたので参考にしてください．
- ▷ 問 5 のコメントに誤りを含んでいたので、修正しました。(06/10)

また，カーディオイドや問 9. に関連して紹介した資料もホームページ (http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~yano/biseki1_2015/) に公開しています．

---

1. ▷ $y=f(x)=\mathrm{Arcsin}\,x \iff x=f^{-1}(y)=\sin y$．$-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ より，$\cos y\ge 0$ となることに注意して，

$$f'(x)=\frac{1}{(f^{-1}(y))'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1).$$

▷ $y=f(x)=\mathrm{Arccos}\,x \iff x=f^{-1}(y)=\cos y$．$0\le y\le\pi$ より，$\sin y\ge 0$ となることに注意して，

$$f'(x)=\frac{1}{(f^{-1}(y))'}=\frac{1}{-\sin y}=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1).$$

▷ $y=f(x)=\mathrm{Arctan}\,x \iff x=f^{-1}(y)=\tan y$．

$$f'(x)=\frac{1}{(f^{-1}(y))'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

2. $x\ge 1$ に対し，$n\le x<n+1$ となる $n\in\mathbb{N}$ を取る (すなわち，$n=[x]$．ただし，$[\cdot]$ は Gauss 記号)．このとき，$(1+\frac{1}{n+1})^x<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{n})^x$ となる．$1+\frac{1}{n}>1$ より，$(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{n+1})^x$，$(1+\frac{1}{n})^x<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ となるから，

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

また，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e$，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=e$ となるから，はさみうちの原理 (定理) より，$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$．

3. l'Hôpital の定理を適用した部分は，等号を赤く $=$ してあります．

(1) 対数を取る: $\lim_{x\to+0}\log x^x=\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$ となるから，$\lim_{x\to+0}x^x=1$．

(2) $5^x<2^x+5^x<2\cdot 5^x$ より，$5<(2^x+5^x)^{\frac{1}{x}}<2^{\frac{1}{x}}\cdot 5$ となる．ゆえに，$\lim_{x\to\infty}(2^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=5$. また，対数を取って，l'Hôpital の定理を適用してもよい．

(3) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x}=\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{-x}=\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{-(x-1)}\cdot\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{-1}$ より，$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$.

(4) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+3x}+2x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{4x^2+3x}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{\sqrt{4+\frac{3}{x}}+2}=-\frac{3}{4}$. ($x\to-\infty$ より，$x<0$ だから，$\sqrt{x^2}=-x$)

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}\cdot\sqrt{x^2+1}=-1$.

(6)

$$\lim_{x\to+0}(1-\cos x^2)\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{1-\cos x^2}} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\sin x^2\cdot 2x}{(1-\cos x^2)^2}} = \lim_{x\to+0}\frac{-(1-\cos x^2)^2}{2x^2\sin x^2} = \lim_{x\to+0}\frac{-(1-\cos x)^2}{2x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{-1}{2}\cdot\frac{2(1-\cos x)\cdot\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to+0}-\frac{(1-\cos x)\cdot\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\cos x} = 0.$$

4. (1) $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.

(2) $\left(\operatorname{Arctan} x^3\right)' = \dfrac{3x^2}{1+x^6}$.

(3) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{4x+3}}\right)' = \dfrac{1\cdot\sqrt{4x+3} - x\cdot\frac{1}{2}(4x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4}{4x+3} = \dfrac{2x+3}{(4x+3)\sqrt{4x+3}}$.

(4) $\left(\dfrac{xe^x}{x^2+1}\right)' = \dfrac{(e^x+xe^x)\cdot(x^2+1) - xe^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(x^3-x^2+x+1)e^x}{(x^2+1)^2}$.

(5) $\left((\cos x^2)^{\frac{2}{3}}\right)' = \dfrac{2}{3}(\cos x^2)^{-\frac{1}{3}}\cdot(-\sin x^2)\cdot 2x = -\dfrac{4x}{3}\sin x^2(\cos x^2)^{-\frac{1}{3}}$.

(6) $(\sin e^x)' = e^x\cos e^x$.

(7) $\left(\log(\sqrt{x^2+8}-x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}-x}\cdot\left\{\dfrac{1}{2}(x^2+8)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x - 1\right\} = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+8}}$.

(8) $(\log(\operatorname{Arcsin} x))' = \dfrac{1}{\operatorname{Arcsin} x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(9) $(\tan(\operatorname{Arccos} x^{-2}))' = \dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{Arccos} x^{-2})}\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^{-4}}}\cdot(-2x^{-3}) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^{-4}}} = \dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4-1}}$.

5. $x'(\theta) = -(1+2\cos\theta)\sin\theta = -\sin\theta - \sin 2\theta$, $y'(\theta) = \cos\theta + \cos 2\theta = (2\cos\theta - 1)(\cos\theta+1)$ となるから，$(x'(\theta), y'(\theta)) = (0,0)$ となるのは，$\theta = \pi$ のとき．$\theta = \pi$ のときを除いて，点 $\left(x(\theta), y(\theta)\right)$ において接線は定義され，その方程式は

$$(\sin\theta + \sin 2\theta)\left(y - y(\theta)\right) + (\cos\theta + \cos 2\theta)\left(x - x(\theta)\right) = 0 \qquad (1)$$

となる．特に，$x'(\theta) \neq 0$ ならば，

$$y - y(\theta) = -\frac{\cos\theta + \cos 2\theta}{\sin\theta + \sin 2\theta}\left(x - x(\theta)\right).$$

コメント $\left(x'(\theta), y'(\theta)\right) \neq 0$ のとき，接線の方程式 (1) が使えます。そのことについて述べていない解答は 1 点減点にしました．$\left(x'(\theta), y'(\theta)\right) = 0$ のときは、接線の傾きの極限が不定形になります。カーディオイドの場合は，$\theta = \pi$ のとき，つまり，図ではハート型に凹んでいるところになりますが、極限が存在し、接線は存在します．実際、

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\theta + \cos 2\theta}{\sin\theta + \sin 2\theta} = \lim_{x\to\pi}\frac{2\cos\theta - 1}{1+2\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta} = \lim_{x\to\pi}\frac{2\cos\theta-1}{1+2\cos\theta}\cdot\frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = 0$$

となるから、$(x(\pi), y(\pi)) = (0,0)$ における接線は、$y = 0$。

6. (1) $x \neq 0$ では，関数 $y = \dfrac{1}{x}$ は連続なので，$x^2\sin\dfrac{1}{x}$ は $x \neq 0$ で連続．そこで，$x = 0$ で連続であることを調べる．$x \neq 0$ のとき，$-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$ より，$-x^2 \leq x^2\sin\dfrac{1}{x} \leq x^2$． はさみうちの原理 (定理) から，$\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$． すなわち，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ が示された．

(2) $x \neq 0$ のとき，$f'(x) = 2x\cdot\sin\dfrac{1}{x} + x^2\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$.

(3) 微分の定義より，$f'(0) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$. ここで，$0 \leq \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ より，$0 \leq \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$ となるから，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ となる．

(4) $\cos\frac{1}{x}$ は $x \to \pm 0$ のとき振動するから，(2) より，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x)$ は存在せず，導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でない．

7. (1) $f(x) = x^x - x^4 + 1$ とおく．例えば，$f(1) = 1 > 0$, $f(2) = -11 < 0$ となるので，中間値の定理から，$f(c) = 0$ となる $c \in (1,2)$ が存在する．すなわち，この c が方程式 $x^x - x^4 + 1 = 0$ の実数解のひとつになる．

(2) $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ とおく．$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^n \left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right) = \infty$，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ となるので，十分大きな $R > 0$ を取れば，$f(-R) < 0 < f(R)$ が成り立つ．中間値の定理から，$f(c) = 0$ となる $c \in (-R, R)$ が存在する．すなわち，この c が方程式 $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ の実数解になる．

コメント：中間値の定理は，閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数に対する定理なので，$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ を示しただけでは，不十分とし，1 点減点にしました．

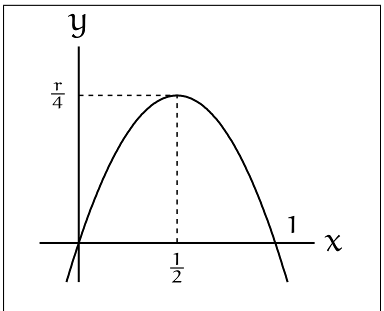
8. $f(x) = \mathrm{Arctan}\,x$ とおく．平均値の定理より，各 $x > 0$ に対し，$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$ となる $c \in (0, x)$ が存在する．$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ であるから，$\frac{\mathrm{Arctan}\,x}{x} = \frac{1}{1 + c^2}$．$0 < c < x$ より，$1 < 1 + c^2 < 1 + x^2$．したがって，$\frac{1}{1 + x^2} < \frac{\mathrm{Arctan}\,x}{x} < 1$ となり，$\frac{x}{1 + x^2} < \mathrm{Arctan}\,x < x$ が得られる．

9. 以下，$f(x) = rx(1 - x)$ とおく．

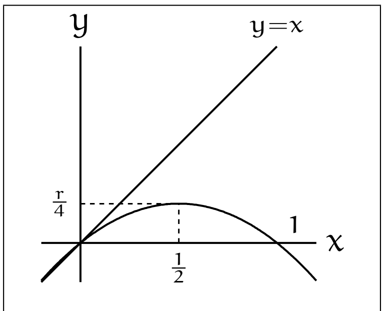
(1) $0 \leq a_n \leq 1$ であることを帰納法により示す．$n = 1$ のときは，仮定より $0 \leq a_1 \leq 1$. $n = k$ のとき，$0 \leq a_k \leq 1$ が成り立つと仮定すると，$a_{k+1} = f(a_k)$, $f(x) = -r\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{r}{4}$ であることから，$0 \leq a_{k+1} \leq \frac{r}{4} \leq 1$ となる．以上より，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$0 \leq a_n \leq 1$ が成り立つことが示された．

(2) $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)$ より，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha) = r\alpha(1 - \alpha)$ となる．これより，$r\alpha\left(\alpha - 1 + \frac{1}{r}\right) = 0$ が得られる．したがって，極限 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在するならば，$\alpha = 0$ または $\alpha = 1 - \frac{1}{r}$ である．

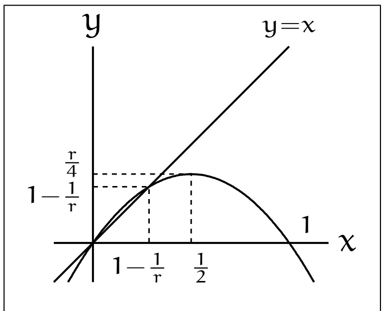
コメント：上の計算は，2 次関数 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ を描くと，それらの交点がちょうど $(0, 0)$, $\left(1 - \frac{1}{r}, 1 - \frac{1}{r}\right)$ になるということでもある．



(1) の図



(3) の図



(4) の図

(3) (2) より，2 次関数 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ の交点は，$(0, 0)$, $\left(1 - \frac{1}{r}, 1 - \frac{1}{r}\right)$ になる．$0 \leq r \leq 1$ より，$1 - \frac{1}{r} \leq 0$. グラフより，$f(x) \leq x$ $(0 \leq x \leq 1)$ となるから (厳密には，$f(x) - x = rx(1 - \frac{1}{r} - x) \leq 0$)，$0 \leq a_n \leq 1$ より，$a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. ゆえに，$\{a_n\}$ は単調減少である．$\{a_n\}$ は有界単調列であることがわかったので，$\{a_n\}$ は収束する．$1 - \frac{1}{r} \leq 0$ より，極限は 0 にしかなりえない．

(4) (a) $1 < r \leq 2$ より，$0 < 1 - \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$. グラフより，$0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{r}$ のとき，$f(x) \geq x$ となる (厳密には，$f(x) - x = rx(1 - \frac{1}{r} - x) \geq 0$)．もし，$0 \leq a_n \leq 1 - \frac{1}{r}$ $(n \in \mathbb{N})$ ならば，$a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ となり，$\{a_n\}$ は単調増加と言える．したがって，$0 \leq a_n \leq 1 - \frac{1}{r}$ $(n \in \mathbb{N})$ を帰納的に示す．$n = 1$ のときはよい．$n = k$ のとき，$0 \leq a_k \leq 1 - \frac{1}{r}$ が成り立つと仮定する．$y = f(x)$ $\left(0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{r}\right)$ の最大値と最小値を考えると，$0 \leq a_{k+1} = f(a_k) \leq 1 - \frac{1}{r}$ となる．

(b) グラフより，$1 - \frac{1}{r} \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき，$f(x) \leq x$ となる．ゆえに，もし $1 - \frac{1}{r} \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ ならば，$a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ となり，$\{a_n\}$ は単調減少と言える．したがって，$1 - \frac{1}{r} \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ を帰納的に示す．$n = 1$ のときはよい．$n = k$ のとき，$1 - \frac{1}{r} \leq a_k \leq \frac{1}{2}$ が成り立つと仮定する．$y = f(x)$ $\left(1 - \frac{1}{r} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$ の最大値と最小値を考えると，$1 - \frac{1}{r} \leq a_{k+1} = f(a_k) \leq \frac{1}{2}$ となる．

コメント：実は，$1 < r \leq 2$ のとき，初項 a_1 の値に関わらず $\{a_n\}$ は収束する．実際，a_1 に関する場合分けの残りである，$\frac{1}{2} \leq a_1 \leq 1$ のとき，$\frac{r}{4} \leq \frac{1}{2}$ より，$0 \leq a_2 \leq \frac{1}{2}$. したがって，$\{a_n\}$ は単調列と限らないが，$\{a_n\}$ の第 2 項 a_2 以降を考えた数列 $\{\tilde{a}_n\}$ $(\tilde{a}_n = a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}))$ は有界単調列となり収束する．これに，高々 a_1 を付け加えた数列が $\{a_n\}$ なのだから，$\{a_n\}$ も収束する．

(5) $a_1 = \sin^2\theta$ と書くと，$a_2 = 4a_1(1-a_1) = 4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) = \sin^2 2\theta$, $a_3 = 4a_2(1-a_2) = 4\sin^2 2\theta(1-\sin^2 2\theta) = \sin^2 4\theta, \ldots$ となるから，一般に $a_n = \sin^2(2^{n-1}\theta)$ $(n \in \mathbb{N})$ となる (これを帰納法で示そう)．$2^{n-1}\theta \to \infty$ $(n \to \infty)$ となるから，$a_n = \sin^2(2^{n-1}\theta)$ は振動し，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在しない．

10. (1) $\{a_n\}$ が収束するとする．$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n+4} = \sqrt{\alpha+4}$ となる．したがって，$\alpha^2 - \alpha - 4 = 0$ となるから，これを解いて，$\alpha = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. $\{a_n\}$ の定義から，$a_n \geq 0$ となるから，$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}} > 0$ より，f は狭義単調増加．別解: $x_1 < x_2$ ならば，$f(x_1) = \sqrt{x_1+4} < \sqrt{x_2+4} = f(x_2)$.

(3) 【単調増加であること】 帰納的に $a_n < a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ を示す．$n=1$ のとき，$a_2 = f(a_1) = \sqrt{a_1+4} = 2 > a_1$. $n=k$ のとき，$a_k < a_{k+1}$ が成り立つと仮定すると，f の狭義単調性から，$a_{k+1} = f(a_k) < f(a_{k+1}) = a_{k+2}$ となる．

【有界であること】 $0 \leq a_n < \alpha$ $(n \in \mathbb{N})$ であることを帰納的に示す．$n=1$ のときは，$a_1 = 0$ より成り立つ．$0 \leq a_k < \alpha$ が成り立つと仮定すると，$0 \leq a_{k+1} = f(a_k) < f(\alpha) = \alpha$.

11. $P(x) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)^2 + \cdots + b_5(x-1)^5$ の形に書けたならば，両辺を微分すると，$b_0 = P(1)$, $b_1 = P'(1)$, $2! \cdot b_2 = P''(1)$, $3! \cdot b_3 = P'''(1)$, $4! \cdot b_4 = P^{(4)}(1)$, $5! \cdot b_5 = P^{(5)}(1)$ となることがわかる．$P(x) = 1 + 14x - 5x^2 - x^4 + 2x^5$, $P'(x) = 14 - 10x - 4x^3 + 10x^4$, $P''(x) = -10 - 12x^2 + 40x^3$, $P'''(x) = -24x + 120x^2$, $P^{(4)}(x) = -24 + 240x$ であるから，$b_0 = 11$, $b_1 = 10$, $b_2 = 9$, $b_3 = 16$, $b_4 = 9$, $b_5 = 2$ となる．

12. (1) $\log f(x) = \dfrac{1}{2}\log(1+x) - \dfrac{1}{2}\log(1-x)$ となるから，両辺を微分して，$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x^2}$. したがって，$(1-x^2)f'(x) = f(x)$ を得る．

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. (1) で得られた式の両辺を微分して，$(1-x^2)f''(x) - 2x \cdot f'(x) = f'(x)$. ゆえに，$f''(x) = \dfrac{2x+1}{(1-x^2)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

(3) Leibniz の公式を用い，(1) の式を n (≥ 2) 回微分する:

$$(1-x^2)\cdot f^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1}\cdot(-2x)\cdot f^{(n)}(x) + \binom{n}{2}\cdot(-2)\cdot f^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x)$$

$$(1-x^2)\,f^{(n+1)}(x) - (2nx+1)\,f^{(n)}(x) - n(n-1)\,f^{(n-1)}(x) = 0$$

(4) (3) の式に $x=0$ を代入して，$f^{(n+1)}(0) - f^{(n)}(0) - n(n-1)\,f^{(n-1)}(0) = 0$. (2) より，$f^{(1)}(0) = 1$, $f^{(2)}(0) = 1$. $f^{(3)}(0) = f^{(2)}(0) + 2\cdot 1\cdot f^{(1)}(0) = 3$，以下同様に，$f^{(4)}(0) = 3^2$, $f^{(5)}(0) = 5\cdot 3^2$, $f^{(6)}(0) = 5^2\cdot 3^2$, $f^{(7)}(0) = 7\cdot 5^2\cdot 3^2$. したがって，$x=0$ における $f(x)$ の 7 次多項式近似は

$$f(x) \fallingdotseq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{5}{16}x^7.$$

(5) $\dfrac{1+x}{1-x} = 2$ を解いて，$x = \dfrac{1}{3}$.

$$\sqrt{2} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{5}{16}\left(\frac{1}{3}\right)^6 + \frac{5}{16}\left(\frac{1}{3}\right)^7 = 1.41415\ldots \fallingdotseq 1.414$$

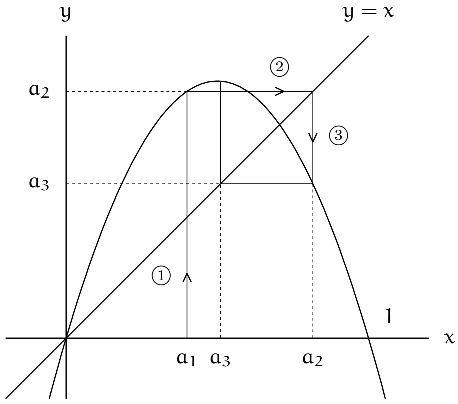
(ちなみに，$\sqrt{2}$ の実際の値は，$1.41421356\ldots$)

コメント: $a_n = f^{(n)}(0)$ とおくと，上の $f^{(n)}(0)$ の計算から，$\begin{cases} a_{2m+1} = (2m+1)!!\,(2m-1)!! \\ a_{2m} \;\;\;\; = (2m-1)!!\,(2m-1)!! \end{cases}$ $(m \in \mathbb{N})$ と予想できる．したがって，多項式近似の x^{2m+1} と x^{2m} の係数はどちらも $\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$ となる．ここで，$n!!$ は二重階乗の記号で，n が奇数なら，$n!! = n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1$，$n$ が偶数なら，$n!! = n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 6\cdot 4\cdot 2$ と定義する．

数列を図示する方法は，例えば，次の 2 つがある．

▷ 横軸を n，縦軸を a_n の値とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，a_n をプロットし，折れ線で結ぶ．

▷ 2 次関数 $y = rx(1-x)$ と直線 $y = x$ を描いた xy 平面に数列 a_n の軌跡を次の手順に従って帰納的に描く:



① $(a_1, 0)$ から，2 次関数 $y = rx(1-x)$ のほうへ y 軸と並行に線を引く．その交点は，(a_1, a_2) になる．

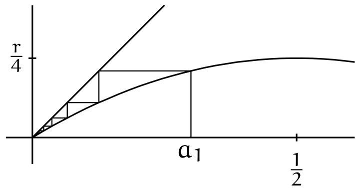
② そこから，直線 $y = x$ のほうへ x 軸と並行に線を引く．交点は (a_2, a_2) になる．

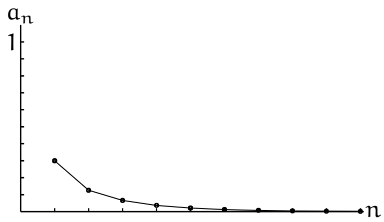
③ そこから，2 次関数 $y = rx(1-x)$ のほうへ y 軸と並行に線を引く．交点は (a_2, a_3) になる．

④ 以下同様に．

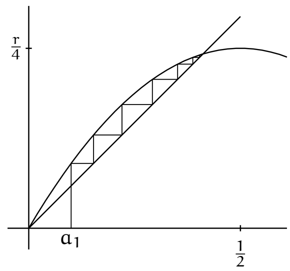
以下，r を変えたときの $\{a_n\}$ の軌道の数値計算を載せておく．

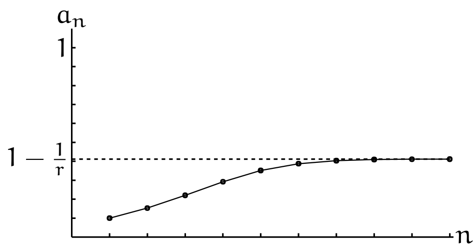
1. $0 < r \leq 1$ のとき，a_1 に関わらず単調減少する (下図は $r = 0.6$, $a_1 = 0.3$ のとき)



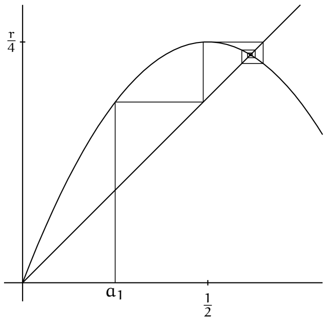


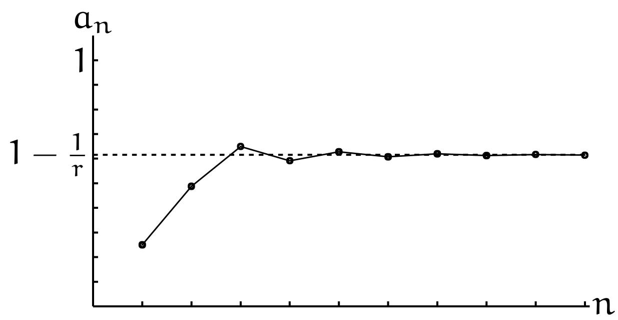
2. $1 \leq r \leq 2$ のとき，主に単調列になる． (下図は $r = 1.7$, $a_1 = 0.1$ のとき)



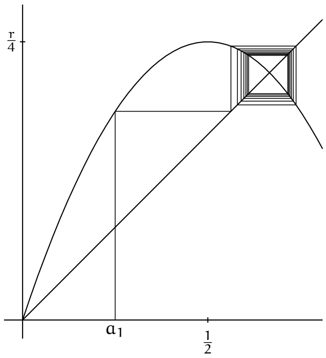


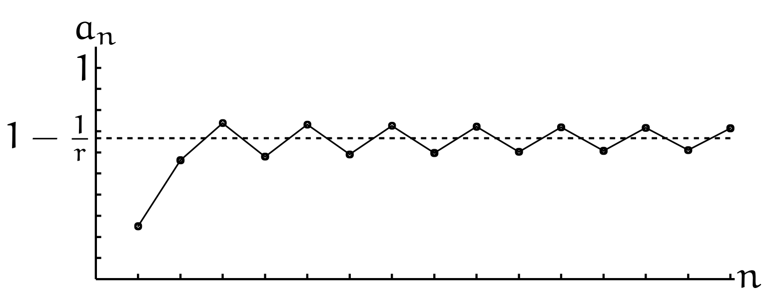
3. $2 < r < 3$ のとき，振動しながら収束する． (下図は $r = 2.6$, $a_1 = 0.25$ のとき)



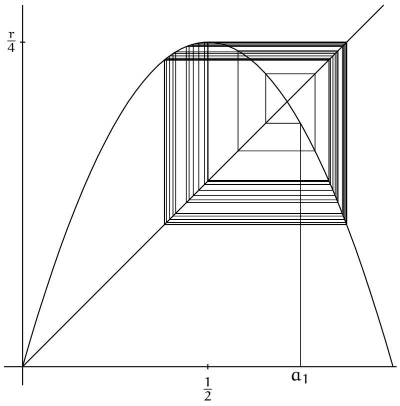


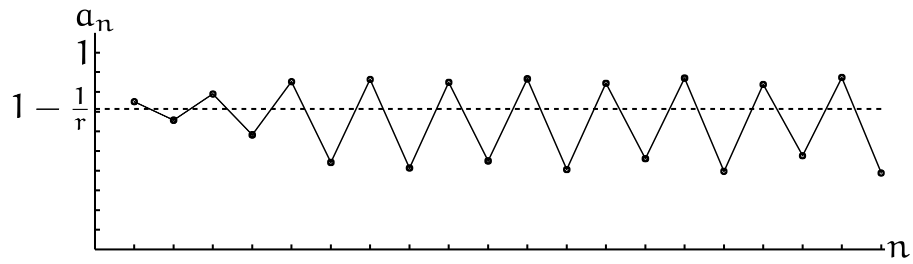
4. $3 \leq r \leq 1 + \sqrt{6}$ のとき，収束せず 2 周期的 (2 つの値を行ったり来たりする) になる (下図は $r = 3.0$, $a_1 = 0.25$ のとき)．ヨツモンマメゾウムシの観察は，この r の範囲にあたる．



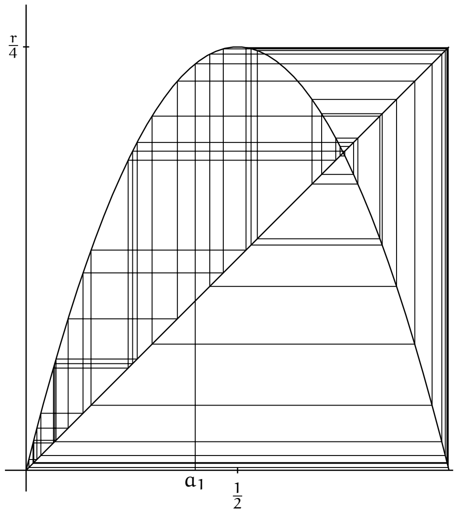


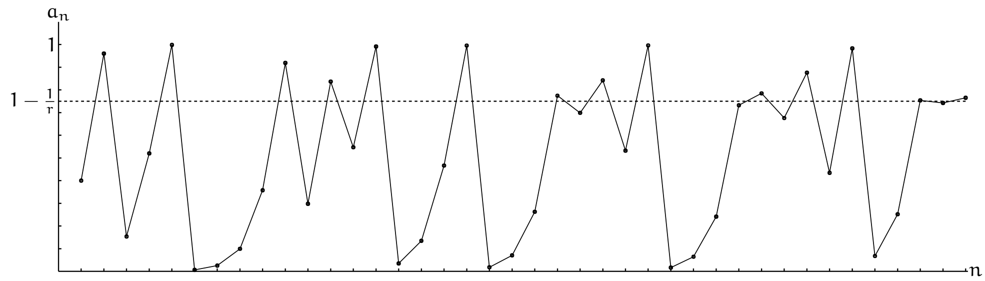
5. $1 + \sqrt{6} \leq r \leq 3.57\cdots$ のとき，2^k 周期的になる (下図は $r = 3.5$, $a_1 = 0.75$ のとき，4 周期に見える)



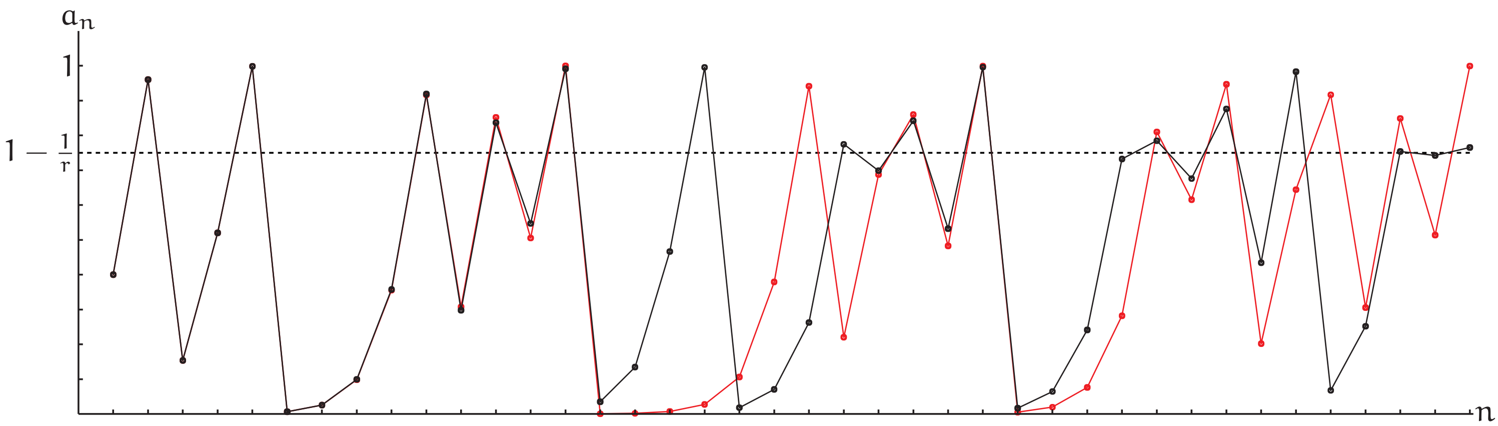


6. $3.57\cdots < r \le 4$ のとき (下図は $r = 4$, $a_1 = 0.4$ のとき)，a_n の値の軌道は複雑になる．





また，このときの軌道は，初期値鋭敏性を持っている．すなわち，初期値 a_1 の値をほんの僅か変えただけで，その後の $\{a_n\}$ の振る舞いが変わってしまう．以下の図は，初期値 $a_1 = 0.4$ の $\{a_n\}$ を黒い線で描いて，それよりごくわずかにずらした初期値 $a_1 = 0.4 + 10^{-5}$ の $\{a_n\}$ を赤い線で描いたものである．



最初のうちは２つの軌道は一致しているように見えるが，途中からまったく異なるものになる．この現象のことをいわゆる **“バタフライ効果 (butterfly effect)”** という．これを暗喩した「ブラジルの 1 匹の蝶の羽ばたきはテキサスで竜巻を引き起こす」(地名は色々なバージョンがある) という言葉がある．

$a_{n+1} = ra_n(1 - a_n)$ という単純なモデルから複雑な現象が現れることは,「複雑な現象は複雑な要因に起因する」という固定観念をぶち壊した．この数理モデルは**カオス理論**の例としてよく取り上げられる．