レポート課題　2015/06/29

注意事項：

- ▷ レポートの回収は 7 月 6 日の講義中に行う。締め切り厳守。
- ▷ レポートは **A4 の紙**とし、**レポートの上部に学生番号と名前**を丁寧に書き、**左上をホチキスで止める**こと。
- ▷ 計算結果だけでなく、計算過程も書くように。

---

1. 次の $\mathbb{R}^2$ 上の関数を考える:

   (1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$　　(2) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

   それぞれの関数について、次の問いに答えよ。確かめる過程もちゃんと書くこと。(各 5 点)

   (a) 原点 $(0,0)$ において連続か？

   (b) 原点 $(0,0)$ において偏微分可能か？偏微分可能ならば、その偏微分係数を答えよ。

   (c) 原点 $(0,0)$ において全微分可能か？

2. 次の関数の偏導関数を求めよ。(各 5 点)

   (1) $f(x,y) = x^2y^3(x^3 - xy + y^4)$　(2) $f(x,y) = \log \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　(3) $f(x,y) = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$

3. $\mathbb{R}^2$ 上の曲面 $z = f(x,y) = \cos\sqrt{x^2+y^2}$ の、点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ における接平面の方程式を求めよ。(10 点)

4. 領域 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 4\}$ 上の関数 $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ を考える。$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ で定義される微分可能な曲線について以下の問いに答えよ。

   (1) 合成関数 $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ について、導関数 $\dfrac{dg}{dt}$ を $\varphi(t)$, $\psi(t)$ を用いて表わせ。(5 点)

   (2) 以下の曲線 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ に対し、$\dfrac{dg}{dt}$ を (1) を利用して求めよ (各 5 点)：

      (a) $\varphi(t) = c_1t + a$, $\psi(t) = c_2t + b$ $\bigl(a,\ b,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R},\ (c_1,c_2) \neq (0,0)\bigr)$

      (b) $\varphi(t) = t^2$, $\psi(t) = t^3$

5. $f(u,v)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の全微分可能な関数とする。次の座標変換 $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$ に対し、合成関数 $g(x,y) = f(\varphi(x,y), \psi(x,y))$ の偏導関数 $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を f の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ を用いて表わせ。また、この式を利用して、$f(u,v) = ue^v$ に対する $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ。(各 10 点)

   (a) $u = x\cos\theta - y\sin\theta$, $v = x\sin\theta + y\cos\theta$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

   (b) $u = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y$, $v = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y$

   (c) $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$