レポート課題 略解　**2015/07/13**

総評：全体的によくできていました．平均点は 76.4 点です．偏微分の計算もよく出来ていて，合成関数の微分の理解も問題なさそうです．その中で，いくつか気になった点をあげます:

- ▷ 問 1. が一番難しかったと思います．連続性と偏微分可能性については，定義を正確に覚えて，確かめられるようになりましょう．２変数関数の極限についても，よく復習してください．
- ▷ 必要な定義や定理は講義で話しましたが，実際にどう全微分可能性の議論をするかは考えどころだったと思います．以下に考え方をまとめたので，参考にしてください．
- ▷ 合成関数の (偏) 導関数の変数はどれなのか意識して公式を使うように注意してください．

---

1. まずは定義を見直しましょう：

$f(x,y)$ が点 (a,b) で連続 $\iff \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

$f(x,y)$ が点 (a,b) で偏微分可能 $\iff$ ２つの極限 $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h} \end{array}\right\}$ が存在する

$f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能 $\iff \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-\alpha h-\beta k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ となる $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ が存在する

また，全微分可能性に関する重要な定理として，上の記号を使えば，

f は (a,b) で全微分可能 $\implies$ f は (a,b) で連続かつ偏微分可能で，$\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b),\ \beta = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

したがって，f の (a,b) での全微分可能性を判断する方法は

(1) f が (a,b) で連続ではないか，または偏微分可能ではないならば，f は (a,b) で全微分可能ではない

(2) f が (a,b) で連続かつ偏微分可能のときは，

- ▷ 定理 "f が領域 D 上偏微分可能で，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ が $(a,b)\in D$ で連続ならば，f は (a,b) で全微分可能"*
- ▷ 極限 $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ を調べる †

があります．定理を利用する上で，論理に注意してください．**"点 (a,b) で連続かつ偏微分可能ならば，点 (a,b) で全微分可能" とは限らない**ことと (実際，(2) の関数はそのような例になっている)，**"偏導関数が連続ではないならば，全微分可能ではない" とは限らない**ことです．例えば，

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

は $\mathbb{R}^2$ 上全微分可能であるが，原点 $(0,0)$ で偏導関数は連続ではないです．

---

*偏導関数が連続ならば，全微分可能であるし，連続でなければ，次のように定義から全微分可能性を判断するよりない．偏導関数が簡単に求められる場面ならば，まずは偏導関数の関数の形から連続性を判断したい．

†もし，f が (a,b) で全微分可能ならば，$\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b),\ \beta = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ とならなければならない．したがって，この極限が 0 にならなければ，全微分可能でない (背理法) ということで，0 になれば，定義より全微分可能であるということ．

(1) (a) 点 (x,y) を，直線 $y=kx$ $(k\in\mathbb{R})$ に沿って原点 $(0,0)$ に近づけたときの極限は $\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ となり，極限は k に依る．$(x,y)\neq(0,0)$ を満たしながら点 (x,y) を $(0,0)$ に近づけるとき，$f(x,y)$ が限りなく近づく値を f の $(0,0)$ における極限 [‡] としたので，今の場合，極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．したがって，f **は** $(0,0)$ **で連続ではない**.

(b) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0$ となり，同様に，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ となるから，f **は** $(0,0)$ **で偏微分可能である**.

(c) f は $(0,0)$ で連続ではないので，f **は** $(0,0)$ **で全微分可能ではない**.

(2) (a) 点 (x,y) を，直線 $y=kx$ $(k\in\mathbb{R})$ に沿って原点 $(0,0)$ に近づけたときの極限は $\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\lim_{x\to 0}\sqrt{|kx^2|}=0$ となり，$(0,0)$ で連続である可能性がある [§]．そこで，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0,\ 0\le\theta\le 2\pi)$ と表すと，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} r\sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}\le\lim_{(x,y)\to(0,0)} r=0$ であり [¶]，$f(x,y)\ge 0$ であるから，$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$ となる．すなわち，f **は** $(0,0)$ **で連続である**.

(b) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0$ となり，同様に，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ となるから，f **は** $(0,0)$ **で偏微分可能である**.

(c) f は絶対値記号を含み偏導関数を求めるのはうまく行かない．したがって，もうひとつの方法を試す．極限

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r\sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}}{r}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}$$

は θ に依る ($(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\le\theta\le 2\pi)$ の $(0,0)$ への近づき方に依る) から，極限は存在しない．すなわち，f **は** $(0,0)$ **で全微分可能ではない**.

2. (1) $f(x,y)=x^2y^3(x^3-xy+y^4)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3(x^3-xy+y^4)+x^2y^3(3x^2-y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2(x^3-xy+y^4)+x^2y^3(-x+4y^3)$$

(2) $f(x,y)=\log\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\log(x^2-y^2)-\log(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{4xy^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2y}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}=-\frac{4x^2y}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}$$

(3) $f(x,y)=\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\sqrt{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\sqrt{x^2+y^2}$ となるから，点 (a,b) における接平面の方程式は

$$z-\cos\sqrt{a^2+b^2}=-\frac{a\sin\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}(x-a)-\frac{b\sin\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}(y-b)$$

4. 今一度，合成関数の微分の公式を．関数 $f(x,y)$ と曲線 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ との合成関数 $g(t)=f(\varphi(t),\psi(t))$ の微分は

$$\frac{dg}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t),\psi(t))\frac{d\varphi}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t),\psi(t))\frac{d\psi}{dt}\quad\left(\text{もしくは，簡略化して }\frac{dg}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)$$

(1) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ より，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ となるから，

$$\frac{dg}{dt}=-\frac{\varphi(t)}{\sqrt{4-\varphi(t)^2-\psi(t)^2}}\frac{d\varphi}{dt}-\frac{\psi(t)}{\sqrt{4-\varphi(t)^2-\psi(t)^2}}\frac{d\psi}{dt}(t)$$

[‡] 点 (x,y) を原点 $(0,0)$ へと，どんな近づけ方をしても $f(x,y)$ が同じ値に近づかなければならない.

[§] これで連続性が示されたわけではない．しかし，(1) でやったように，与えられた関数が不連続かどうか確かめるために一度やってみるのがよい.

[¶] 極限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} r$ は (x,y) の $(0,0)$ への近づけ方に依らず 0 に収束する．θ を含まない r のみの極限を考えるのがポイント.

(2) (a) $\varphi(t) = c_1 t + a$, $\psi(t) = c_2 t + b$ より，

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{c_1 t + a}{\sqrt{4 - (c_1 t + a)^2 - (c_2 t + b)^2}} \cdot c_1 - \frac{c_2 t + b}{\sqrt{4 - (c_1 t + a)^2 - (c_2 t + b)^2}} \cdot c_2$$

コメント 曲線の方程式 $x = c_1 t + a$, $y = c_2 t + b$ は，(a, b) を通る方向ベクトル (c_1, c_2) の直線を表している．この直線に沿った関数 $f(x, y)$ の $x = 0$ における微分，すなわち，合成関数 $g(t) = f(c_1 t + a, c_2 t + b)$ の $x = 0$ における微分 $\frac{dg}{dt}(0)$ を関数 f の方向微分という．x, y に関する偏微分は方向微分のひとつである (それぞれ $(1, 0)$, $(0, 1)$ の方向)．一般に，関数 $f(x, y)$ の方向微分は

$$\frac{dg}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\frac{dy}{dt}(0) = c_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + c_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

となる．

(b) $\varphi(t) = t^2$, $\psi(t) = t^3$ より，

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{t^2}{\sqrt{4 - t^4 - t^6}} \cdot 2t - \frac{t^3}{\sqrt{4 - t^4 - t^6}} \cdot 3t^2 = -\frac{2t^3 + 3t^5}{\sqrt{4 - t^4 - t^6}}$$

5. もう一度，合成関数の微分の公式を．関数 $f(u, v)$ と変数変換 $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ に対し，その合成関数 $g(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ の偏導関数は

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \left(\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(x, y), \psi(x, y))\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \left(\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

また，関数 $f(u, v) = ue^v$ に対しては $\frac{\partial f}{\partial u} = e^v$, $\frac{\partial f}{\partial v} = ue^v$ となるから，

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^{\psi(x,y)}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi(x, y)e^{\psi(x,y)}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = e^{\psi(x,y)}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi(x, y)e^{\psi(x,y)}\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

(a) $u = x\cos\theta - y\sin\theta$, $v = x\sin\theta + y\cos\theta$ より，

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \sin\theta, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (-\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \cos\theta$$

また，$f(u, v) = ue^v$ のとき，

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^{x\sin\theta + y\cos\theta}\cos\theta + (x\cos\theta - y\sin\theta)e^{x\sin\theta + y\cos\theta}\sin\theta$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = -e^{x\sin\theta + y\cos\theta}\sin\theta + (x\cos\theta - y\sin\theta)e^{x\sin\theta + y\cos\theta}\cos\theta$$

(b) $u = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$, $v = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$ より，

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{1}{2}$$

また，$f(u, v) = ue^v$ のとき，

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\left(\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y}$$

(c) $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ より，

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2y, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (-2y) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 2x$$

また，$f(u, v) = ue^v$ のとき，

$$\frac{\partial g}{\partial x} = (2x^2y - 2y^3 + 2x)e^{2xy}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = (2x^3 - 2xy^2 - 2y)e^{2xy}$$