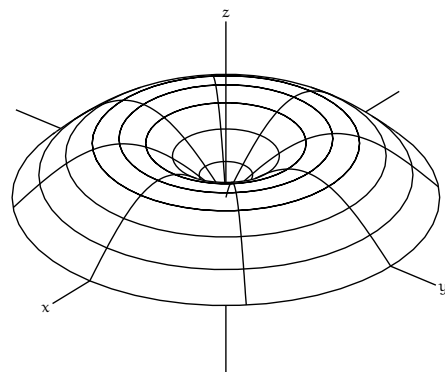
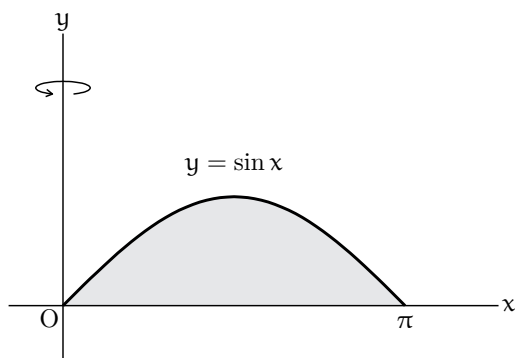
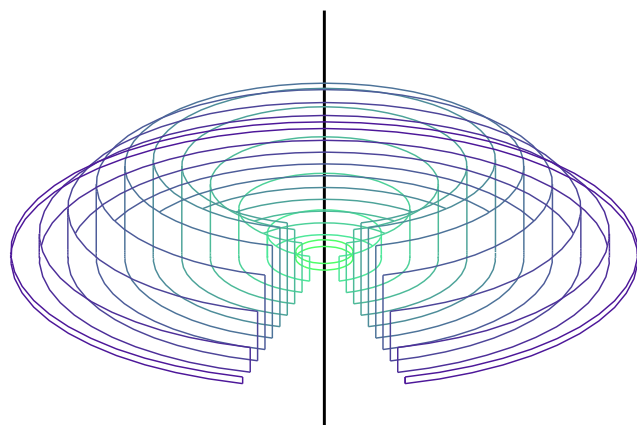
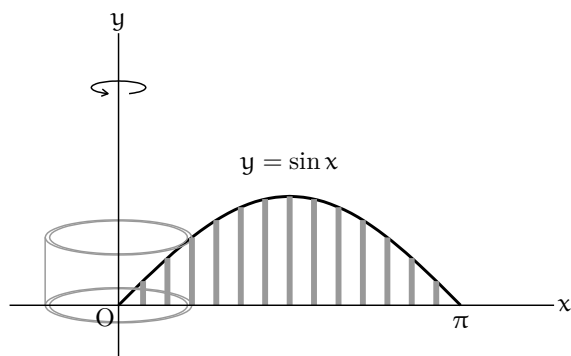


## ★ 回転体の別の積分の仕方

曲線  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) と  $x$  軸で囲まれる図形を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めたい。



そこで、 $y = \sin x$  を縦に (幅の狭い) 長方形に分割して、その長方形を  $y$  軸のまわりに 1 回転して足し合わせる (積分する) 方法を考える：



それは、様々な高さの円筒の面積を足し合わせる (積分する \*) ことになるから、

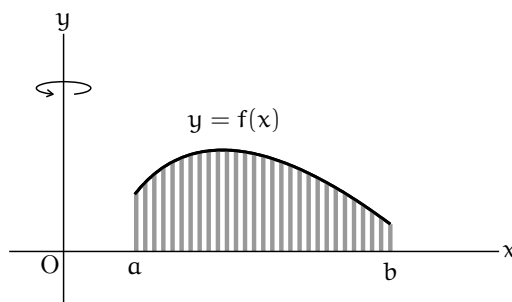
$$V = \int_0^{\pi} 2\pi x \cdot \sin x \, dx$$

と体積を計算することができる。一般に、

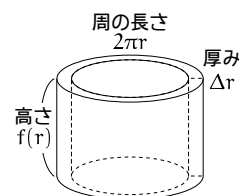
曲線  $y = f(x)$  ( $f(x) \geq 0$ ) と 2 直線  $x = a$ ,  $x = b$ 、および  $x$  軸で囲まれる図形を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx$$

となる。これをバウムクーヘン積分 (shell integration) という。上図のように、円筒を重ねた形が層をなして、バウムクーヘンのようになることに由来する。



\* もうちょっと正確に言うと、 $r$  を原点からの距離として、原点から  $r$  までの回転体の体積  $V(r)$  を考えられたならば、 $V(r + \Delta r) - V(r)$  は厚み  $\Delta r$  をもった円筒の体積  $\cong 2\pi r \cdot \sin r \cdot \Delta r$  にほぼ等しい。よって、極限を考えると、 $V'(r) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{V(r + \Delta r) - V(r)}{\Delta r} = 2\pi r \cdot \sin r$  となる流れ。



(1)  $y = \sin x$   $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(2) 不等式  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin 2x \leq y \leq \sin x$  で表される図形を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。