演習問題　2014/12/19

1. 次で与えられる閉曲線 C に対し、線積分 $\int_C (x+y)\,dx + xy\,dy$ の値を求めよ。

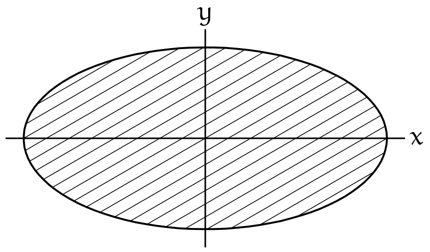
   (1) 3 点 $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $O=(0,0)$ を通る折れ線 ABOA

   (2) 反時計回りに向き付けられた、原点を中心とし半径が 1 の円

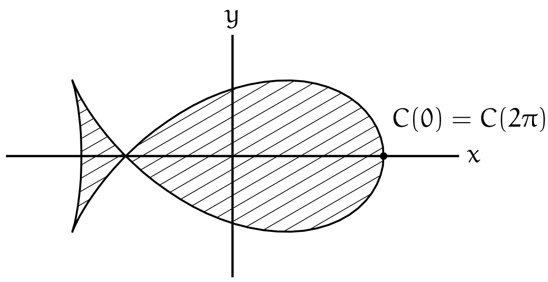
2. Green の定理を利用して、次で与えられる曲線で囲まれる領域の面積を求めよ:

   (1) 方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,\ b>0)$ と表せられる曲線を楕円といい、$C(t)=(a\cos t,\ b\sin t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ とパラメータ表示できる。楕円で囲まれる領域の面積を求めよ。

   (2) $C(t)=\left(\cos t-\dfrac{\sin^2 t}{\sqrt{2}},\ \cos t\sin t\right)$ $(0\le t\le 2\pi)$ と表せられる曲線を fish curve という。fish curve で囲まれる領域の面積を求めよ。(頭と尻尾の方の 2 つの領域に分けて考えよ。また、曲線の向きに注意せよ)



楕円



fish curve

3. $P(x,y)=x-y\sin x$, $Q(x,y)=\cos x-y^2$ とおく。

   (1) 任意の単純閉曲線 C に対して、線積分 $\int_C P\,dx+Q\,dy$ の値が 0 になることを示せ。

   (2) 始点を原点 $(0,0)$、終点を点 (x,y) とする、区分的になめらかな有向曲線 $\tilde{C}$ を考える。前問より、線積分 $\int_{\tilde{C}} P\,dx+Q\,dy$ の値は、このような曲線 $\tilde{C}$ の取り方に依らず決まる。したがって、関数 $\varphi(x,y)$ を次のように定義することができる:

   $$\varphi(x,y)=\int_{\tilde{C}} P\,dx+Q\,dy$$

   この関数 $\varphi(x,y)$ を具体的に求めよ。($\tilde{C}$ の取り方に依らずに線積分の値が決まるので、$\tilde{C}$ として折れ線など簡単な曲線でこの線積分を計算すると良い)

   (3) 前問で求めた $\varphi(x,y)$ は

   $$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y),\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y)$$

   を満たすことを示せ。