

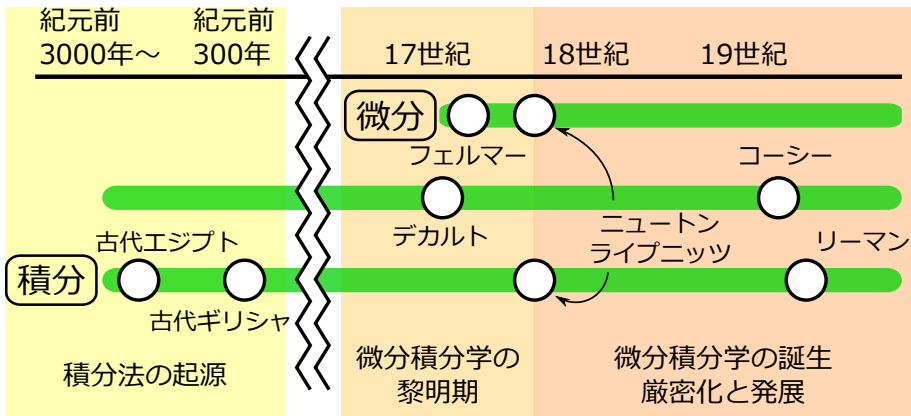
# 定積分の定義について

この講義資料も小テストなどと一緒にホームページ

[http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~yano/biseki2\\_2014/](http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~yano/biseki2_2014/)  
に公開される

2014 年度微分積分学 II (担当: 矢野充志)

# ごく大まかな歴史

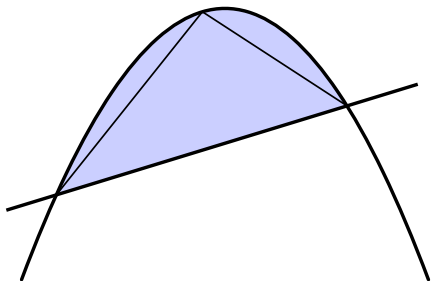


## ごく大まかな歴史

積分法の起源

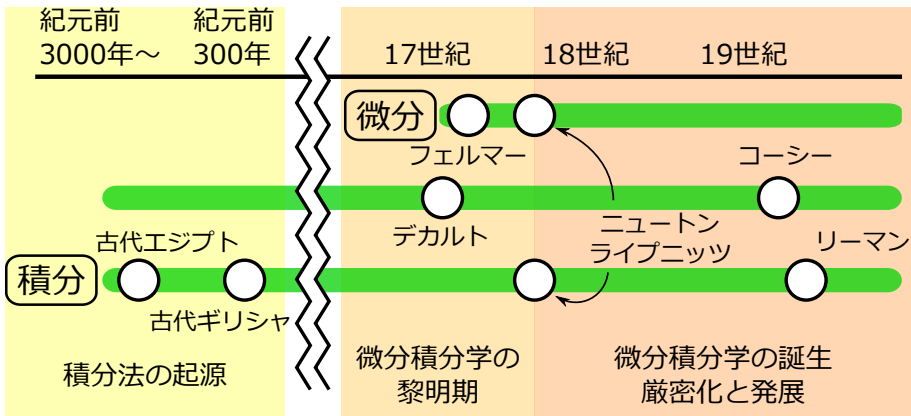
古代エジプト: 測量術

古代ギリシャ: アルキメデスによる放物線の求積、取り尽くし法など



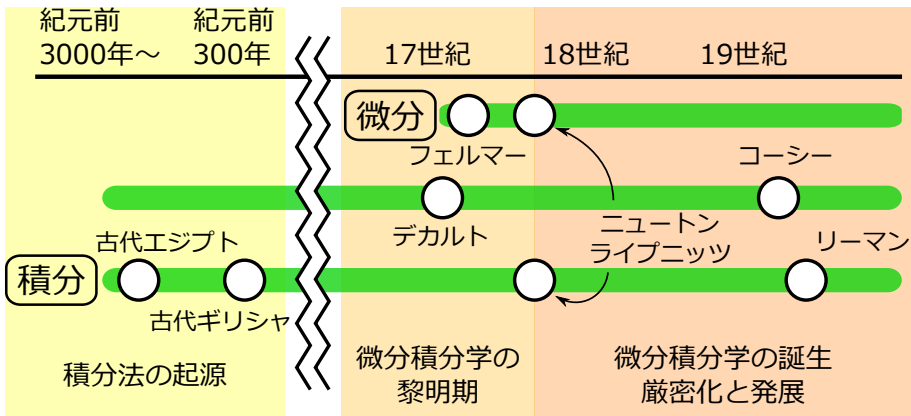
アルキメデス (紀元前 287? ~ 212 年) と放物線の求積

# ごく大まかな歴史



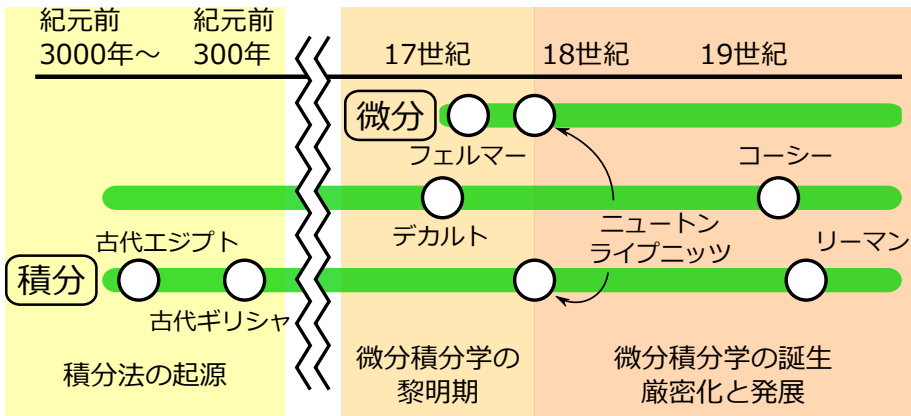


# ごく大まかな歴史





# ごく大まかな歴史





## ごく大まかな歴史

微分積分学の誕生、厳密化と発展

コーシー：関数の連続、極限に関する貢献。 $\epsilon$ - $\delta$  論法の元となるアイデア。極限を厳密かつ明確に論じることができるようになった

リーマン：定積分の厳密な定式化



コーシー (1789 ~ 1857 年) とリーマン (1826 ~ 1866 年)



## ごく大まかな歴史

関連:

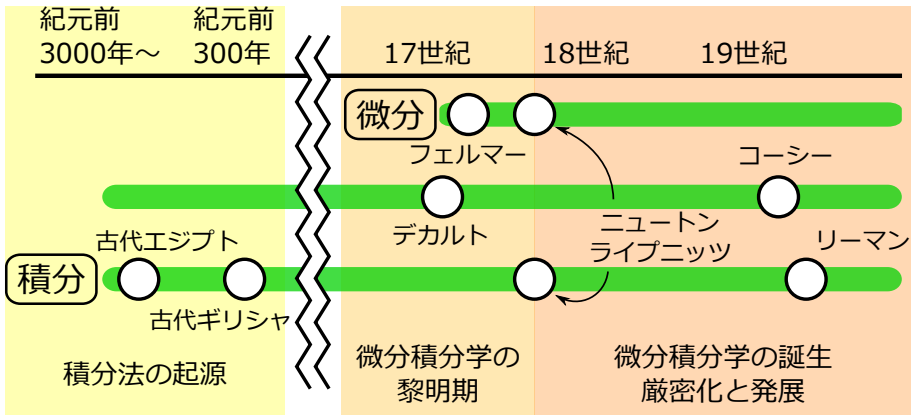
- 映画「天地明察」

天文と算術をこよなく愛する碁打ち、安井算哲 (演 - 岡田准一)。算術と天体観測をもとに、大陸から伝わってきた当時の暦の間違いを正し、日本独自の暦を制定するために奮闘する生き様を描いた時代小説が原作の作品。関孝和も登場する。

- 小説「算法少女」(遠藤寛子、ちくま学芸文庫)

父の指導により少女ながら算法に秀でた町娘・あき。算法の問題の書かれた絵馬(算額)の間違いを指摘したことで、大名の目に止まり算法指南役に迎えられようとしたが、関流(関孝和の流れを汲むとする流派)との対立を招く。その騒動の中で、自身の算法に対する新しい向きあいかたを見つける。児童向けで、読みやすく爽やかな歴史小説。

# ごく大まかな歴史

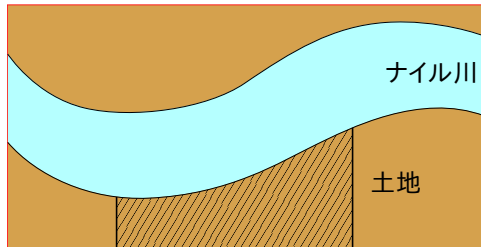


# 積分法 (求積) の起源

## 古代エジプト (紀元前 3000 年頃 ~ 紀元前 332 年)

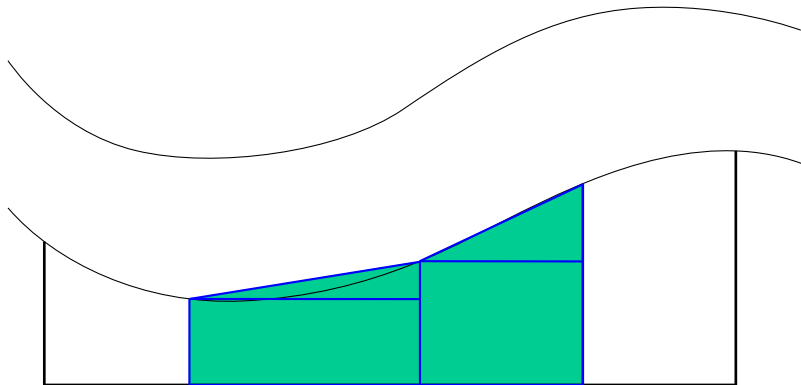
毎年起こるナイル川の氾濫により下流付近には肥沃な土地が広がる。毎年変化する農地の測量の要求により、測量術、幾何学が発達。この時代から土地の広さに応じた徴税の仕組みがあった。また、氾濫の周期を知るために、太陽暦や天文学も発達した。

“エジプトはナイルの賜” (ヘロドトス)

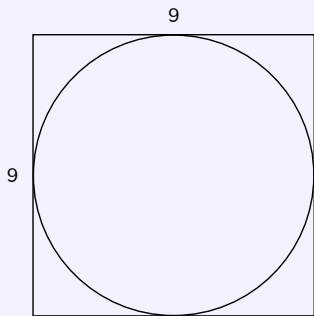


## 面積を測るためのアイデア

測りたい領域を面積のよくわかっている図形 (長方形、三角形など) で近似する



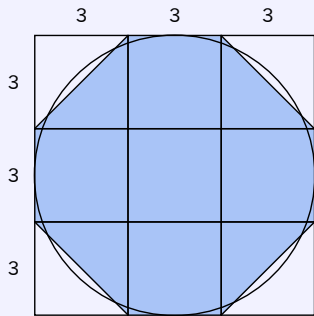
## 古代エジプト人による円の面積の求め方



一辺が9の正方形に内接する円



## 古代エジプト人による円の面積の求め方



一辺が9の正方形に内接する円  
(直径9の円の面積)

$$\doteq 5 \times (\text{一辺が3の正方形の面積})$$

$$+ 4 \times (\text{三角形の面積})$$

$$= 7 \times (\text{一辺が3の正方形の面積})$$

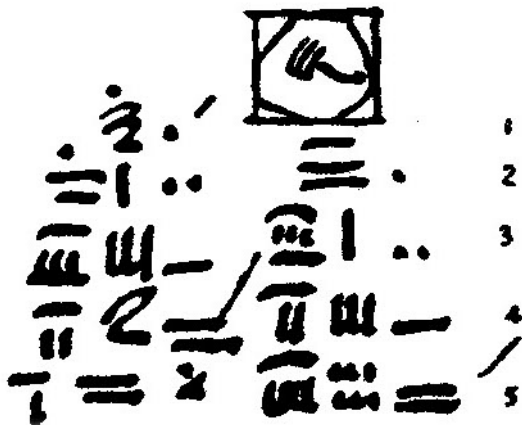
$$= 63$$

古代エジプト人は直径9の円の面積を、63に1を足した64とした(諸説ある)。このとき、円周率 $\pi$ は

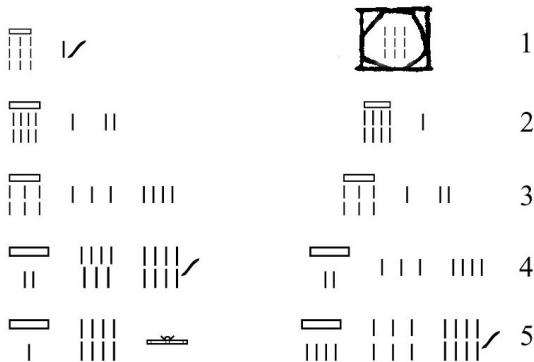
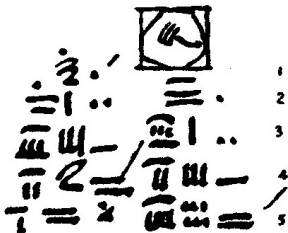
$$\pi r^2 = \pi (9/2)^2 \doteq 64$$

$$\therefore \pi \doteq \frac{64 \cdot 2^2}{9^2} = 3.160493 \dots$$

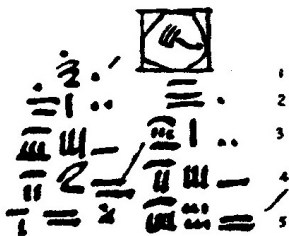
リンド・パピルス (古代エジプトの数学文書、紀元前 1650 年前後)  
 算術、代数、幾何、測量からなる 87 の問題があり、そのうちの 48 番目



リンド・パピルス (古代エジプトの数学文書、紀元前 1650 年前後)  
 算術、代数、幾何、測量からなる 87 の問題があり、そのうちの 48 番目



図：左がパピルスに記されたヒエラティック (神官文字)、右がこれをヒエログリフ (神聖文字) に直したもの



参考サイト

- リンド数学パピルスと古代エジプトの数学

<http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/museum/RhindPapyrus/index.htm>

- Géométrie dans l'Égypte antique

[http://fr.m.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9om%C3%A9trie\\_dans\\_l%27%C3%89gypte\\_antique](http://fr.m.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9om%C3%A9trie_dans_l%27%C3%89gypte_antique)

右から左に読む

正方形に内接する円

9		✓	1/	9		1
18			2	8		2
36			4	16		3
72			8/	32		4
81			合計	64		5

## アルキメデス (紀元前 287? ~ 212 年) による円周率の計算

円に内接する正 96 角形と外接する正 96 角形の周を比較し、 $\pi = 3.14\dots$  であることを三平方の定理と平方根の近似値 (分数) を用いて示した (この平方根の近似値の求め方は記録に残っていない)。正 6 角形から角数を 2 倍していき、正 96 ( $= 6 \cdot 2^4$ ) 角形まで計算して次の不等式を得た:

$$(3.140845\dots =) \quad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \quad (= 3.142857\dots)$$

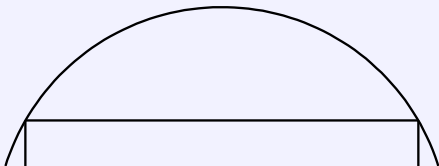


図 : 角数を 2 倍 2 倍で増やして、円に近づける (取り尽くし法)

## アルキメデス (紀元前 287? ~ 212 年) による円周率の計算

円に内接する正 96 角形と外接する正 96 角形の周を比較し、 $\pi = 3.14\dots$  であることを三平方の定理と平方根の近似値 (分数) を用いて示した (この平方根の近似値の求め方は記録に残っていない)。正 6 角形から角数を 2 倍していき、正 96 ( $= 6 \cdot 2^4$ ) 角形まで計算して次の不等式を得た:

$$(3.140845\dots =) \quad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \quad (= 3.142857\dots)$$

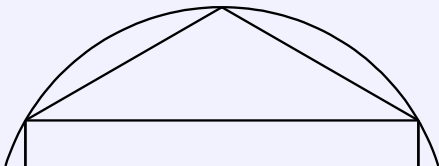


図 : 角数を 2 倍 2 倍で増やして、円に近づける (取り尽くし法)

## アルキメデス (紀元前 287? ~ 212 年) による円周率の計算

円に内接する正 96 角形と外接する正 96 角形の周を比較し、 $\pi = 3.14\dots$  であることを三平方の定理と平方根の近似値 (分数) を用いて示した (この平方根の近似値の求め方は記録に残っていない)。正 6 角形から角数を 2 倍していき、正 96 ( $= 6 \cdot 2^4$ ) 角形まで計算して次の不等式を得た:

$$(3.140845\dots =) \quad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \quad (= 3.142857\dots)$$

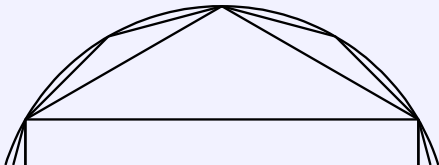


図 : 角数を 2 倍 2 倍で増やして、円に近づける (取り尽くし法)





## アルキメデス (紀元前 287? ~ 212 年) による円周率の計算

$$(3.140845 \dots =) 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} (= 3.142857 \dots)$$

計算機による数値計算:

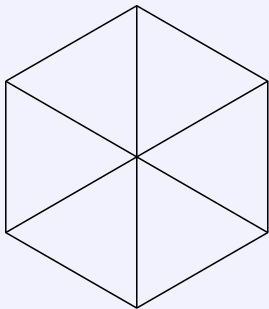


図: 正六角形

$l_n$ : 直径 1 の円の内接正  $n$  角形の周

$L_n$ : 直径 1 の円の外接正  $n$  角形の周

$$l_n < \pi < L_n$$

$n$	$l_n$	$L_n$
6	3.0000	3.4641
12		
24		
48		
96		

## アルキメデス (紀元前 287? ~ 212 年) による円周率の計算

$$(3.140845 \dots =) 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} (= 3.142857 \dots)$$

計算機による数値計算:

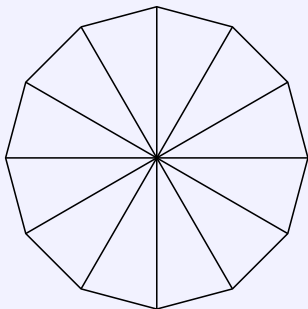


図 : 正 12 角形

$l_n$  : 直径 1 の円の内接正  $n$  角形の周  
 $L_n$  : 直径 1 の円の外接正  $n$  角形の周

$$l_n < \pi < L_n$$

$n$	$l_n$	$L_n$
6	3.0000	3.4641
12	3.1058	3.2153
24		
48		
96		

## アルキメデス (紀元前 287? ~ 212 年) による円周率の計算

$$(3.140845 \dots =) 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} (= 3.142857 \dots)$$

計算機による数値計算:

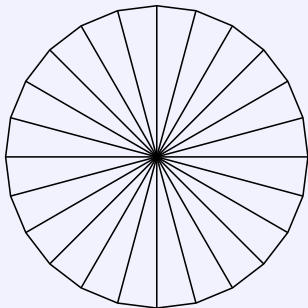


図 : 正 24 角形

$l_n$  : 直径 1 の円の内接正  $n$  角形の周

$L_n$  : 直径 1 の円の外接正  $n$  角形の周

$$l_n < \pi < L_n$$

$n$	$l_n$	$L_n$
6	3.0000	3.4641
12	3.1058	3.2153
24	3.1326	3.1596
48		
96		



## アルキメデス (紀元前 287? ~ 212 年) による円周率の計算

$$(3.140845 \dots =) 3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7} (= 3.142857 \dots)$$

計算機による数値計算:

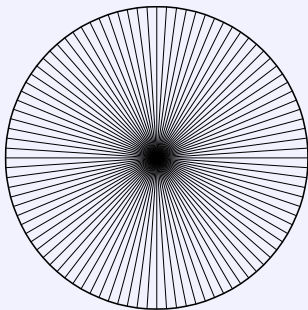


図 : 正 96 角形

$l_n$  : 直径 1 の円の内接正  $n$  角形の周

$L_n$  : 直径 1 の円の外接正  $n$  角形の周

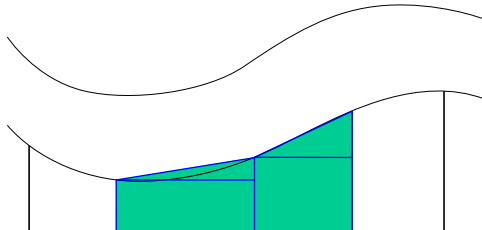
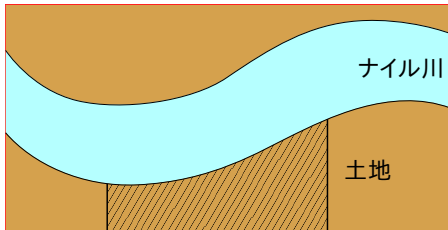
$$l_n < \pi < L_n$$

$n$	$l_n$	$L_n$
6	3.0000	3.4641
12	3.1058	3.2153
24	3.1326	3.1596
48	3.1393	3.1460
96	3.1410	3.1427

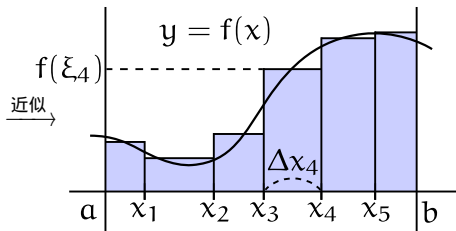
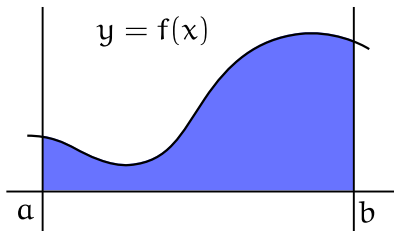
## 定積分の定義

## 面積を測るためのアイデア

測りたい領域を面積のよくわかっている図形 (長方形、三角形など) で近似する

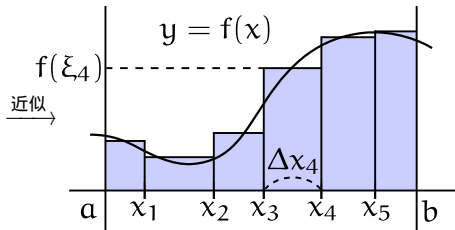
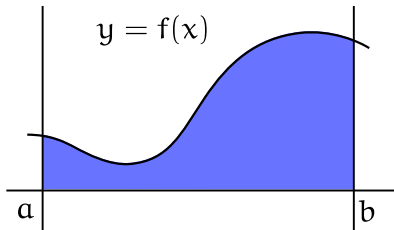


与えられた関数  $f(x)$  と  $x$  軸、二直線  $x = a$ ,  $x = b$  で囲まれた領域をいくつかの長方形で近似

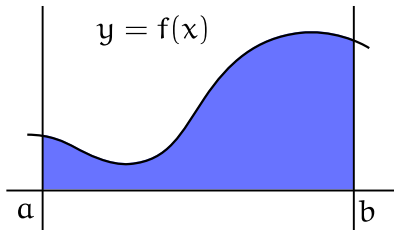




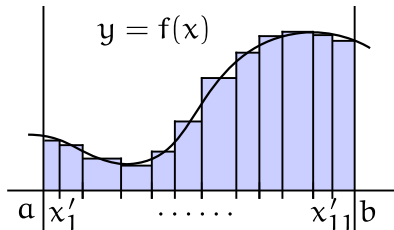
与えられた関数  $f(x)$  と  $x$  軸、二直線  $x = a$ ,  $x = b$  で囲まれた領域をいくつかの長方形で近似  
さらに、できるだけ細かい長方形で近似すると囲まれた領域に近づかず



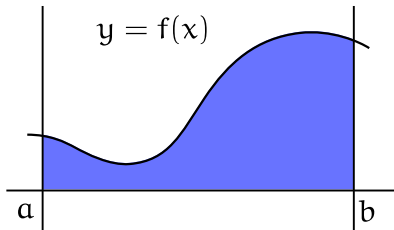
与えられた関数  $f(x)$  と  $x$  軸、二直線  $x = a$ ,  $x = b$  で囲まれた領域をいくつかの長方形で近似  
さらに、できるだけ細かい長方形で近似すると囲まれた領域に近づかず



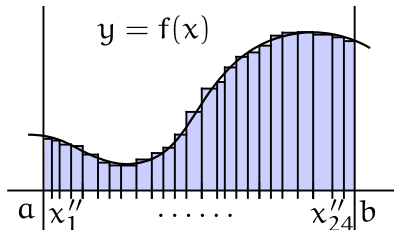
近似  $\rightarrow$



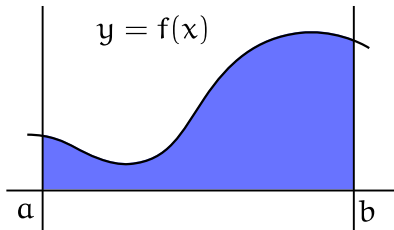
与えられた関数  $f(x)$  と  $x$  軸、二直線  $x = a$ ,  $x = b$  で囲まれた領域をいくつかの長方形で近似  
さらに、できるだけ細かい長方形で近似すると囲まれた領域に近づかず



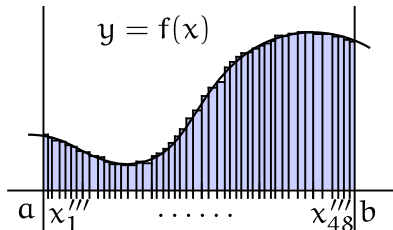
近似  
→



与えられた関数  $f(x)$  と  $x$  軸、二直線  $x = a$ ,  $x = b$  で囲まれた領域をいくつかの長方形で近似  
さらに、できるだけ細かい長方形で近似すると囲まれた領域に近づかず



近似  $\rightarrow$



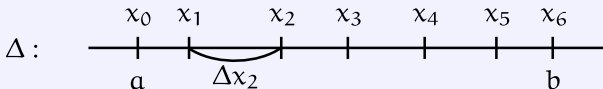
## 定積分を定義するためのいくつかの準備

### 区間の分割

$n$  を自然数とする。閉区間  $[a, b]$  に対し、 $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  とし、 $a$  と  $b$  の間の  $n - 1$  個の相異なる点  $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$  をとることを  $[a, b]$  の  $n$  分割 といい、

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

と書く。



また、

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

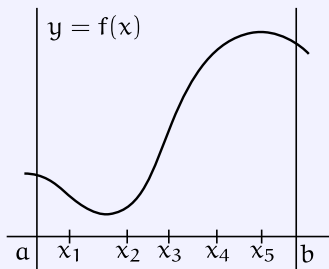
と書いて、 $|\Delta|$  を分割  $\Delta$  の幅 という。

## 定積分を定義するためのいくつかの準備

### Riemann 和 (リーマン和)

$f(x)$  : 閉区間  $[a, b]$  上の関数 (連続とは限らない)

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b : [a, b]$  の分割



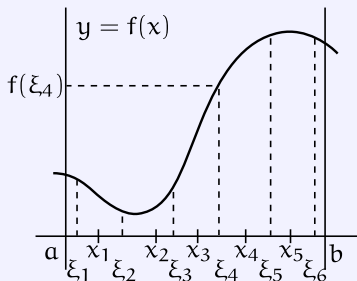
## 定積分を定義するためのいくつかの準備

### Riemann 和 (リーマン和)

$f(x)$  : 閉区間  $[a, b]$  上の関数 (連続とは限らない)

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b : [a, b]$  の分割

各  $1 \leq i \leq n$  に対し、区間  $[x_{i-1}, x_i]$  の点  $\xi_i$  をひとつ (自由に) 取る



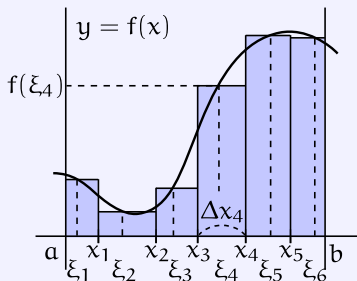
## 定積分を定義するためのいくつかの準備

### Riemann 和 (リーマン和)

$f(x)$  : 閉区間  $[a, b]$  上の関数 (連続とは限らない)

$\Delta$  :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  :  $[a, b]$  の分割

各  $1 \leq i \leq n$  に対し、区間  $[x_{i-1}, x_i]$  の点  $\xi_i$  をひとつ (自由に) 取る



分割  $\Delta$  と点の集合  $\{\xi_i\}$  に対し、

$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^n \underbrace{f(\xi_i) \cdot \Delta x_i}_{\text{長方形の面積}}$$

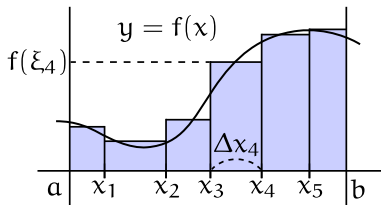
$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

とおき、これを Riemann 和 という。  
( $\Delta$  と  $\xi_i$  に依存して決まる)

Riemann 和は、 $f(x)$  のグラフの囲む領域を近似する長方形たちの面積の和で、“グラフの囲む面積”の近似値と考えられる。



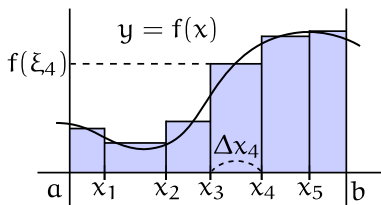
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_5 < x_6 = b$  を閉区間  $[a, b]$  の分割とする。



$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^6 f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

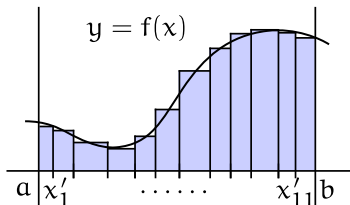
$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_5 < x_6 = b$  を閉区間  $[a, b]$  の分割とする。



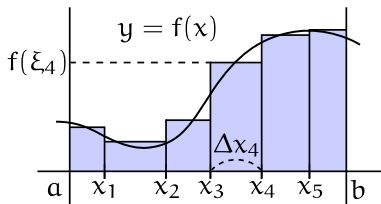
$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^6 f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$
$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

↓  $\Delta$  より小さな幅の分割  $\Delta'$  を取る ↓



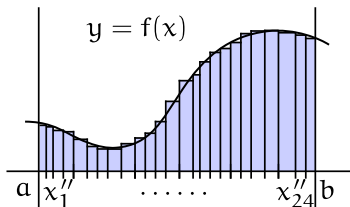
$$S(\Delta', \{\xi'_i\}) = \sum_{i=1}^{12} f(\xi'_i) \cdot \Delta x'_i$$
$$(\Delta x'_i = x'_i - x'_{i-1})$$

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_5 < x_6 = b$  を閉区間  $[a, b]$  の分割とする。



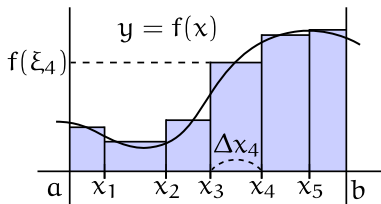
$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^6 f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$
$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

↓ さらに、 $\Delta'$  より小さな幅の分割  $\Delta''$  を取る ↓



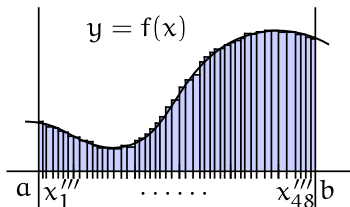
$$S(\Delta'', \{\xi_i''\}) = \sum_{i=1}^{25} f(\xi_i'') \cdot \Delta x_i''$$
$$(\Delta x_i'' = x_i'' - x_{i-1}'')$$

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_5 < x_6 = b$  を閉区間  $[a, b]$  の分割とする。



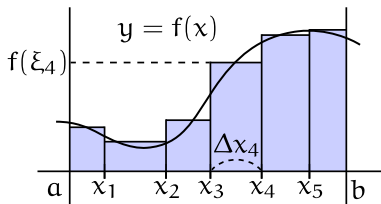
$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^6 f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$
$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

↓ さらに、 $\Delta''$  より小さな幅の分割  $\Delta'''$  を取る ↓



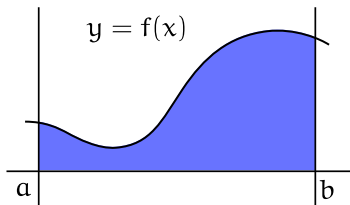
$$S(\Delta''', \{\xi_i'''\}) = \sum_{i=1}^{49} f(\xi_i''') \cdot \Delta x_i'''$$
$$(\Delta x_i''' = x_i''' - x_{i-1}''')$$

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_5 < x_6 = b$  を閉区間  $[a, b]$  の分割とする。



$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^6 f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$
$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

↓  $\Delta$  より小さな幅の分割を次々と取っていくという極限操作 ↓



$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta, \{\xi_i\})$$

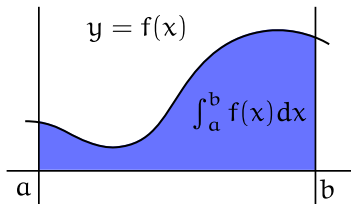
## 定積分の定義

$f(x)$  : 閉区間  $[a, b]$  上の関数 (連続とは限らない)

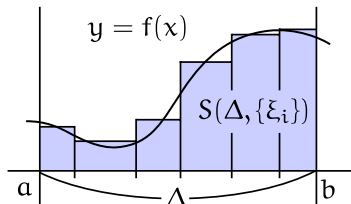
幅  $|\Delta|$  が小さくなるように  $[a, b]$  の分割  $\Delta$  を取っていくと、Riemann 和  $S(\Delta, \{\xi_i\})$  がある一定値  $\sigma$  に近づくと、  
 $f(x)$  は  $[a, b]$  で (Riemann) 積分可能 という。このとき、

$$\int_a^b f(x) dx = \sigma \quad \left( = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta, \{\xi_i\}) \right)$$

とおき、 $[a, b]$  上の関数  $f(x)$  の定積分 という。



極限  $|\Delta| \rightarrow 0$   
幅  $|\Delta|$  を小さくして  
0 に近づける



## 定積分の定義

$f(x)$  : 閉区間  $[a, b]$  上の関数 (連続とは限らない)

幅  $|\Delta|$  が小さくなるように  $[a, b]$  の分割  $\Delta$  を取っていくと、Riemann 和  $S(\Delta, \{\xi_i\})$  がある一定値  $\sigma$  に近づくとき、  
 $f(x)$  は  $[a, b]$  で (Riemann) 積分可能 という。このとき、

$$\int_a^b f(x) dx = \sigma \quad \left( = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta, \{\xi_i\}) \right)$$

とおき、 $[a, b]$  上の関数  $f(x)$  の定積分 という。

- 1 このような極限が収束するときはあるのか？
- 2 実際に、このような極限が計算できるのか？  
(Riemann 和から定積分を計算できるのか？)

$f(x)$  が連続の場合は、積分可能であることが保証されている：

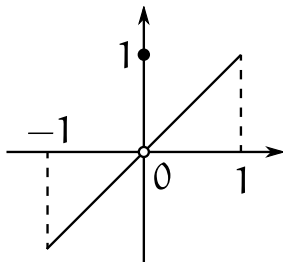
### 連続関数の定積分の存在 (Riemann)

$f(x)$  を閉区間  $[a, b]$  上の連続関数とすると、どんな分割  $\Delta$  の取り方をしても、どんな点  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  の取り方をしても、幅  $|\Delta|$  を小さくしていくと Riemann 和  $S(\Delta, \{\xi_i\})$  は一定値に収束する。すなわち、連続関数は常に積分可能である。

実は、

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

のような非連続関数も  $[-1, 1]$  上積分可能。





## Riemann 和の具体的な計算例 $f(x) = x$ ( $0 \leq x \leq 1$ ) の場合

先ほどの Riemann の定理から、連続関数の場合は積分可能で、分割  $\Delta$  の取り方に依らずに極限の計算結果が決まる。

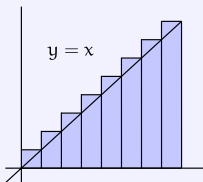
$$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = 1$$

$$\xi_i = x_i \in [x_{i-1}, x_i], \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$$

とすると、Riemann 和  $S(\Delta, \{\xi_i\})$  は

$$\begin{aligned} S(\Delta, \{\xi_i\}) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$



一般には、Riemann 和の計算は難しい。 $f(x) = \sin x$  などどうすればいいのだろうか？どのような分割  $\Delta$  を取り、点  $\xi_i$  を取って計算すればいいのだろうか？

## 微分積分学の基本定理 (ニュートン、ライプニッツ)

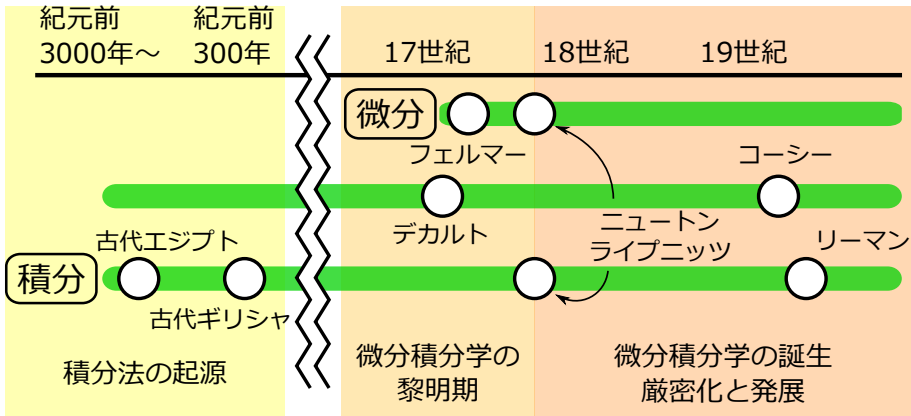
$f(x)$  を区間  $I$  上連続な関数とする。  $F(x)$  を  $f(x)$  の不定積分 (原始関数) とすると、任意の  $a, b \in I$  に対して、

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

が成り立つ。

この定理により、定積分の計算が格段にしやすくなる！  
分割  $\Delta$  や  $\xi_i$  の取り方を気にすることなく、あかかも“微分の逆操作”で解くことができるのが高校の数学以来の話。

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = 2$$



## 推薦書籍・参考文献等

- ゼロから学ぶ微分積分 (小島寛之、講談社)

微分積分の意味を直感的にわかりやすく書かれた本。ときおり挟まれる対話により、微分積分学で湧き上がる疑問点にも答えている。微分も知らぬまま読んだ高校のときには、微分積分が魔法のように見えた。ニュートン・ライプニッツの時代もそうだったのだろう。

- 解析入門 (小平邦彦、岩波書店)

微分積分学の本格的で明快な教科書。 $\epsilon$ - $\delta$  論法になれないとつらい部分があるかも。

- 微分積分学入門 (黒田紘敏さんによる電子テキスト)

他の微分積分学の本と違い、具体例が豊富で証明も丁寧。 $\epsilon$ - $\delta$  論法の独習にも良いと思う。入手先は

[http://www7b.biglobe.ne.jp/~h-kuroda/pdf/text\\_calculus.pdf](http://www7b.biglobe.ne.jp/~h-kuroda/pdf/text_calculus.pdf)

数学者の画像は Wikimedia Commons より引用。関孝和の画像は GFDL に従う。