レポート課題　2014/10/24

注意事項：

- レポートの回収は翌週 (10/31) の講義に行う。
- レポートは **A4 の紙**とし、**レポートの上部に学生番号と名前**を書き、**左上をホチキスで止める**こと。
- 計算結果だけでなく、計算過程も書くように。

---

1. $u = \tan\dfrac{x}{2}$ とするとき、$\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1+u^2}{2}$ となることを示せ。(4 点)

2. 次の不定積分および定積分を求めよ。(各 5 点)

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+11}\,dx$　(3) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$

(4) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2+2x-3}\,dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$　(8) $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}(3x)\,dx$　(9) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}\,dx$

3. **【人口問題における数理モデル】**

(1) $N = N(t)$ を時刻 t におけるある地域の人口とする。ある時刻 t_0 と、t_0 より少しだけ経った時刻 $t_0+\epsilon$ ($\epsilon > 0$ はとても小さな数) との間に、人口は $N(t_0+\epsilon) - N(t_0)$ だけ変化する。すなわち、時刻 t_0 から $t_0+\epsilon$ までの間の人口の変化率は $\frac{N(t_0+\epsilon)-N(t_0)}{(t_0+\epsilon)-t_0}$ となる。したがって、変数 t の関数 $N(t)$ の $t = t_0$ における微分 $\frac{dN}{dt}(t_0) = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\frac{N(t_0+\epsilon)-N(t_0)}{(t_0+\epsilon)-t_0}$ は、時刻 t_0 における "瞬間の" 人口の変化率 (変化の速さ) と考えることができる。

フェルフルスト (Pierre-François Verhulst、1804 年〜1849 年) は人口増加の仕方を説明する数理モデル* として次の方程式 (微分を含むこのような方程式を**微分方程式**という) を提案した：

(†)
$$\frac{dN}{dt} = \gamma N\left(1 - \frac{N}{\mu}\right) \qquad (\gamma,\ \mu \text{ は正の定数})$$

すなわち、方程式 (†) を満たす関数 $N(t)$ が実際の人口の変化をよく表していると発表した。さて、方程式 (†) を形式的に $\dfrac{\mu}{N(\mu-N)}dN = \gamma dt$ と変形し、両辺をそれぞれ変数 N, t について積分して、

(††)
$$\log\left(\frac{N}{\mu - N}\right) = \gamma t + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

となることを示せ。ただし、ここで N, $\mu - N > 0$ と仮定している。(4 点)

---

*数理モデルとは時間により変化する自然現象などを数式で記述し、その現象の振る舞いを模倣 (近似) した "模型" のことをいう。モデルを作ることによって、その現象の本質を理解し、未来予測の目安を得ることができる。微分積分学の (ひいては数学の) ひとつの応用である。微分方程式 (†) については、シャーレの中に入れられた細菌の増殖の仕方にもこのモデルを当てはめることができる。この方程式は生物の個体数の変動に関する基本的なモデルである。

(2) 時刻 $t=0$ のときの N の値を $N_0 = N(0) > 0$ とするとき、積分定数 C を N_0, γ, μ を用いて表わせ。また、式 (††) を変形して

$$N = \frac{\mu}{1 + e^{-(\gamma t + C)}}$$

となることを示し、方程式 (†) を満たしていることを確かめよ。この数理モデルによると、人口はどのように推移するのであろうか？ $N = N(t)$ $(0 \le t)$ のグラフの概形を描け ($\lim_{t\to\infty} N(t)$ に注意せよ)。(1 点)

4. 次の不定積分を求めよ。(各 6 点)

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + \sin x + \cos x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+4)\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx$

5. 次の広義積分を計算せよ。(各 6 点)

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx$

6. (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ となることを示せ。(2 点)

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$ を求めよ。(3 点)

(3) $0 < \epsilon < 1$、n を自然数とし、$I_n(\epsilon) = \displaystyle\int_\epsilon^1 (-\log x)^n\,dx$ とおくとき、漸化式

$$I_n(\epsilon) = -\epsilon(-\log\epsilon)^n + n\cdot I_{n-1}(\epsilon) \quad (n \ge 2)$$

を導け。(3 点)

(4) 次を示せ。(2 点)

$$\int_0^1 (-\log x)^n\,dx = n!$$