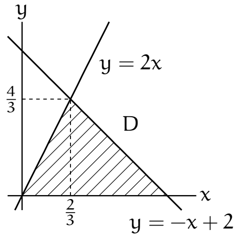
レポート解答　2015/01/09

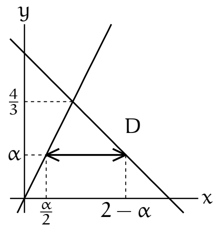
総評：

- 概ねよく出来ていたと思います．平均点は 78.7 点でした．与えられた領域をそのまま縦線形として計算するのか，変数変換して計算するのか判断できるようになりましょう．図示することで変数の範囲を確認しましょう．
- 単純な計算ミスや Jacobian の絶対値 $|\det J|$ を掛け忘れないように注意しましょう．
- 最後の問題の解答の誤りを修正しました．(2016/01/10)

---

1. (1) まずは，領域 D を図示する．y について単純な領域 (縦線形) に書く．$y=\alpha\ (0\le\alpha\le\frac{4}{3})$ のとき，D の中で x の動く範囲は $\frac{\alpha}{2}\le x\le 2-\alpha$. したがって，$D=\left\{(x,y)\mid 0\le y\le\frac{4}{3},\ \frac{y}{2}\le x\le 2-y\right\}$ と書ける．与えられた重積分を累次化して，



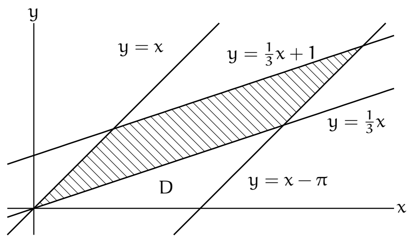


$$\iint_D y\,dxdy=\int_0^{\frac{4}{3}}\left(\int_{\frac{y}{2}}^{2-y}y\,dx\right)dy=\int_0^{\frac{4}{3}}\left(2y-\frac{3}{2}y^2\right)dy=\frac{16}{27}.$$

(2) まずは，領域 D を図示する．縦線形として計算ができるが，領域を分けて計算するのが大変なので変数変換する．$u=-x+3y,\ v=x-y$ とおくと，$x=\frac{u+3v}{2},\ y=\frac{u+v}{2}$. Jacobian を計算すると，

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad\therefore\ \det J=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}.$$

$E=\left\{(x,y)\mid 0\le u\le 3,\ 0\le v\le\pi\right\}$ とおくと (D を u, v で書き直す),



$$\iint_D e^{-x+3y}\sin(x-y)\,dxdy=\iint_E e^u\sin v\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\int_0^3 e^u\sin v\,du\right)dv=e^3-1.$$

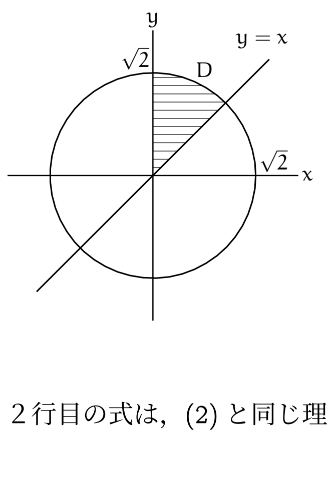
E の定義式 $0\le u\le 3,\ 0\le v\le\pi$ において，u, v の範囲はお互いに依存せず決められているので，２行目の式は $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^3 e^u\,du\times\int_0^{\pi}\sin v\,dv$ としてよい．

(3) まずは，領域 D を図示する．極座標変換する方法と縦線形として計算する方法，両方を示しておく．

極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ すると，

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\ \sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix},\quad\therefore\ \det J=r.$$

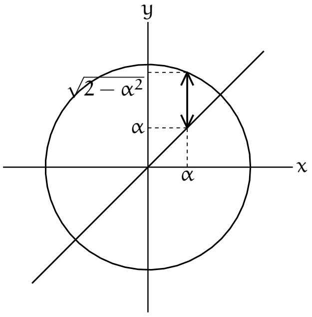
領域 D の図より，$E=\left\{(r,\theta)\mid 0\le r\le\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$ とおくと，



$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{x}y\,dxdy&=\iint_E\sqrt{r\cos\theta}\cdot r\sin\theta\cdot r\,drd\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\sqrt{2}}r^{\frac{5}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\sin\theta\,dr\right)d\theta\\&=\frac{7}{2}(\sqrt{2})^{\frac{7}{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\sin\theta\,d\theta\\&=\frac{7}{2}(\sqrt{2})^{\frac{7}{2}}\left[\cos^{\frac{3}{2}}\theta\times\frac{2}{3}\times(-1)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{8}{21}.\end{aligned}$$

２行目の式は，(2) と同じ理由で，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}r^{\frac{5}{2}}\,dr\times\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\sin\theta\,d\theta$ としてもよい．

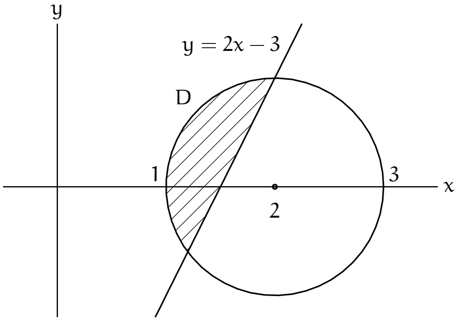
一方，縦線形としては，$D = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\, x \le y \le \sqrt{2 - x^2}\right\}$ と書ける．したがって，

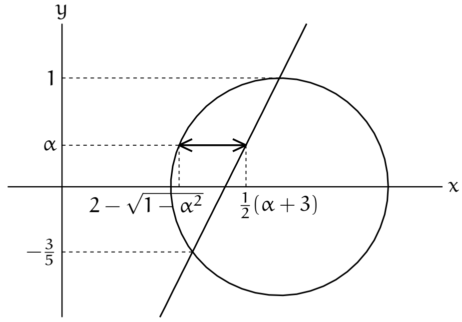


$$\iint_D \sqrt{x} y \, dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x} y \, dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(2 - x^2)\sqrt{x} - \frac{1}{2} x^{\frac{5}{2}} \right) dx$$
$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \right]_0^1 = \frac{8}{21}.$$

(4) 講義中にも話しましたが，D の定義式で $x \ge 0$ は誤りで $y \ge 0$ が正しいです．重積分を計算する過程は本質的には変わりませんが，煩雑な計算を強いられる形になります．すみません．

まずは，領域 D を図示する．y について単純な領域 (縦線形) に書く．$y = \alpha$ $(-\frac{3}{5} \le \alpha \le 1)$ のとき，D の中で x の動く範囲は $2 - \sqrt{1 - \alpha^2} \le x \le \frac{1}{2}(\alpha + 3)$．したがって，$D = \left\{(x, y) \mid -\frac{3}{5} \le y \le 1,\, 2 - \sqrt{1 - y^2} \le x \le \frac{1}{2}(y + 3)\right\}$ と書ける．与えられた重積分を累次化して，

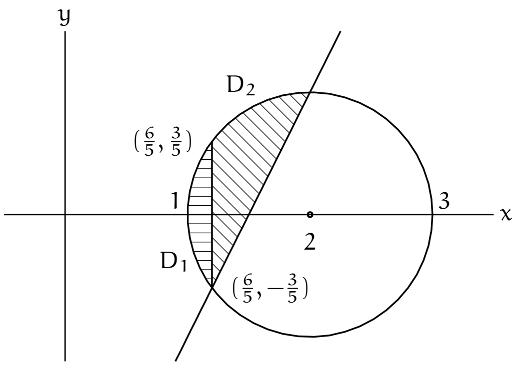




$$\iint_D y \, dxdy = \int_{-\frac{3}{5}}^1 \left(\int_{2-\sqrt{1-y^2}}^{\frac{1}{2}(y+3)} y \, dx \right) dy$$
$$= \int_{-\frac{3}{5}}^1 \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} y + y\sqrt{1 - y^2} \right) dy = \frac{16}{75}.$$

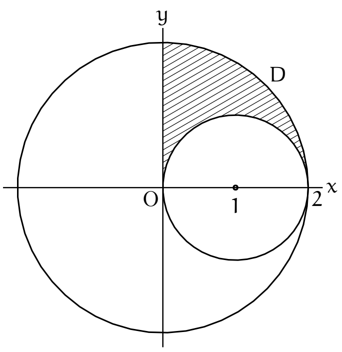
もしくは，領域を次のように分割して，x について単純な領域として書いて計算する:

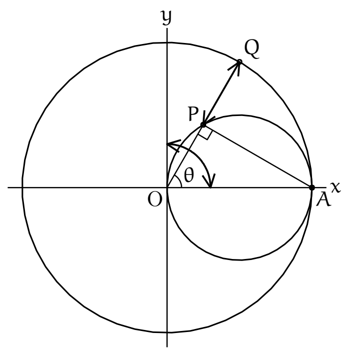
$$D = D_1 \cup D_2, \quad D_1 = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 1 \le x \le \frac{6}{5},\, -\sqrt{1 - (x-2)^2} \le y \le \sqrt{1 - (x-2)^2} \right\},$$
$$D_2 = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \frac{6}{5} \le x \le 2,\, 2x - 3 \le y \le \sqrt{1 - (x-2)^2} \right\}.$$



$$\iint_D y \, dxdy = \iint_{D_1} y \, dxdy + \iint_{D_2} y \, dxdy$$
$$= \int_{\frac{6}{5}}^2 \left(\int_{2x-3}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} y \, dy \right) dx \qquad \left(\because \quad \iint_{D_1} y \, dxdy = 0 \right)$$
$$= -\frac{1}{2} \int_{\frac{6}{5}}^2 (5x - 6)(x - 2) \, dx$$
$$= \left[-\frac{1}{20} (5x - 6)^2 (x - 2) \right]_{\frac{6}{5}}^2 + \frac{1}{20} \int_{\frac{6}{5}}^2 (5x - 6)^2 \, dx$$
$$= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot 4^3 = \frac{16}{75}.$$

(5) まずは，領域 D を図示する．





極座標変換してみる．$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と書くとき，点 (x, y) が D の中にあるならば，$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. 原点を O，$A = (2, 0)$，$Q = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$ とし，点 P を線分 OQ と小円との交点とする．このとき，$OP = 2\cos\theta$ だから，$\theta = \alpha$ $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$ のとき，D の中を r が動く範囲は $2\cos\alpha = OP \le r \le OQ = 2$. したがって，$E = \left\{(r, \theta) \mid 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 2\cos\theta \le r \le 2\right\}$ とおくと，

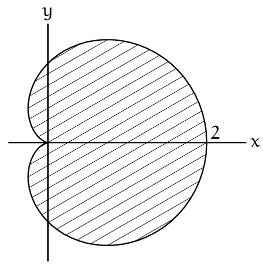
$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy &= \iint_E r\cdot r\,drd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{2\cos\theta}^{2} r^2\,dr\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\cos^3\theta\right)d\theta \\ &= \frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3}\Big[\sin\theta\cos^2\theta+2\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4}{3}\pi-\frac{16}{9}.\end{aligned}$$

2. (1) 重積分 $S = \iint_D dxdy$ に極座標変換を施せばよい．各 $\alpha \le \theta \le \beta$ に対し，D の中で r の動く範囲は $0 \le r \le f(\theta)$. したがって，$E = \left\{(r, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ 0 \le r \le f(\theta)\right\}$ とおくと，

$$S = \iint_E r\,drd\theta = \int_\alpha^\beta\left(\int_0^{f(\theta)} r\,dr\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta.$$

(2) (a) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を方程式に代入:

$$\begin{aligned}(x^2+y^2-x)^2 &= x^2+y^2 \\ r^2(r-\cos\theta)^2 &= r^2 \\ r^2\big((r-\cos\theta)^2-1\big) &= 0\end{aligned}$$



$r > 0$ のとき，$r - \cos\theta = -1$ とすると，$r = \cos\theta - 1 \le 0$ となり不適．ゆえに，$r = 0$ となる場合も含めて，$r = 1 + \cos\theta$ がカーディオイドを表わす．

(b) (1) の式に当てはめればよい：

$$S = \int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$

言葉が足りなかったのですが，タイルは長方形と仮定しています．ヒントの重積分を計算すると，

$$\begin{aligned}I &= \iint_K \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\,dxdy \\ &= \int_{x_0}^{x_0+a}\sin(2\pi x)\,dx \times \int_{y_0}^{y_0+b}\sin(2\pi y)\,dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\big\{\cos(2\pi(x_0+a))-\cos(2\pi x_0)\big\}\cdot\big\{\cos(2\pi(y_0+b))-\cos(2\pi y_0)\big\}. \qquad (\maltese)\end{aligned}$$

今，タイルを組み合わせてできる長方形を $K = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\right\}$ とする．K は $a \times b$ の長方形である．この K がいくつかのタイルからなる，すなわち，いくつかの長方形領域 $K_1, \ldots, K_N$ で分割されていると考えることができる：$K = K_1 \cup \cdots \cup K_N$. また，$i \ne j$ ならば $K_i \cap K_j$ は高々面積 0 である．したがって，

$$\iint_K \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{N}\iint_{K_i}\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\,dxdy. \qquad (\maltese\maltese)$$

各タイルは $K_i = \left\{(x, y) \mid x_i \le x \le x_i + a_i,\ y_i \le y \le y_i + b_i\right\}$ ($a_i \times b_i$ の長方形領域) と書けて，仮定より，K_i の辺の長さ a_i, b_i の少なくとも一方は整数となるから，

$$\iint_{K_i}\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\,dxdy = \frac{1}{4\pi^2}\big\{\cos(2\pi(x_i+a_i))-\cos(2\pi x_i)\big\}\cdot\big\{\cos(2\pi(y_i+b_i))-\cos(2\pi y_i)\big\} = 0.$$

これと $(\maltese)$，$(\maltese\maltese)$ を合わせて，

$$\big\{\cos(2\pi a)-1\big\}\cdot\big\{\cos(2\pi b)-1\big\} = 0.$$

ゆえに，$\cos(2\pi a) = 1$ または $\cos(2\pi b) = 1$. したがって，a, b の少なくとも一方は整数とならなければならない．