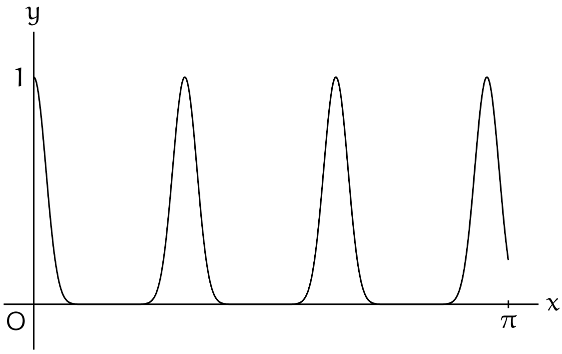
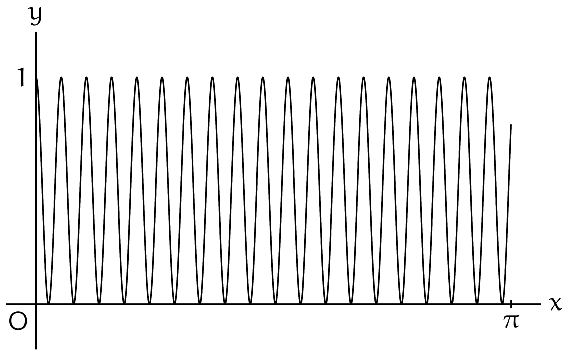
⋆ 積分可能ではない関数の例: Dirichlet（ディリクレ）関数

Dirichlet 関数 $f(x)$ とは、$\mathbb{R}$ 上の関数で、x が有理数のとき $f(x)=1$、x が無理数のとき $f(x)=0$ となるような関数である。各 $k,\ n \in \mathbb{N}$ に対し、$\mathbb{R}$ 上の関数 $f_{k,n}(x) = \cos^{2k}(n!\pi x)\ (x \in \mathbb{R})$ を考えると、この関数列 $\{f_{k,n}\}_{k,n}$ の極限が Dirichlet 関数 $f(x)$ に一致する:

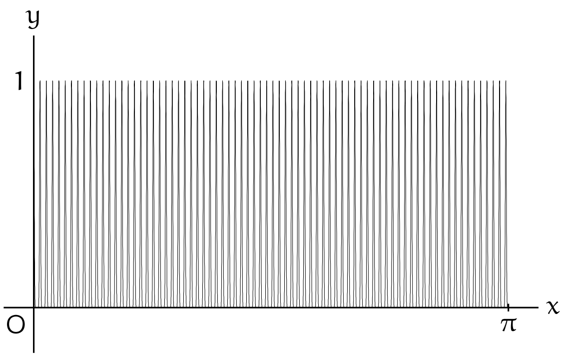
$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} f_{k,n}(x)\right) = \begin{cases} 1 & (x\text{ が有理数}) \\ 0 & (x\text{ が無理数}) \end{cases}$$



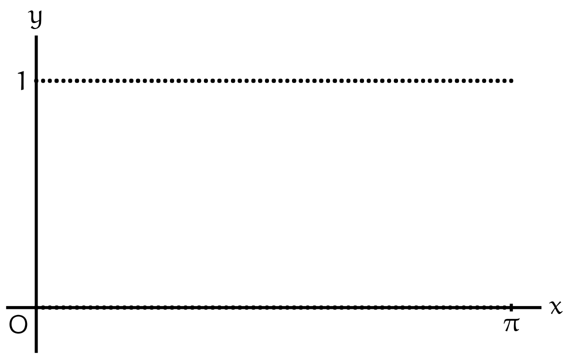
$k=8,\ n=1$ のときの $f_{k,n}(x)$ のグラフ



$k=1,\ n=3$ のときの $f_{k,n}(x)$ のグラフ



$k=8,\ n=4$ のときの $f_{k,n}(x)$ のグラフ



Dirichlet 関数 $f(x)$ のグラフのイメージ

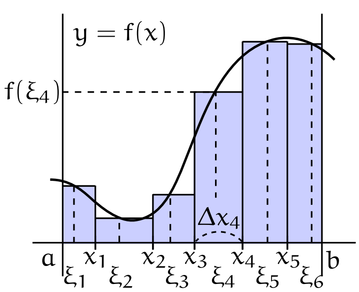
$f_{k,n}(x)$ は連続だが、その極限 $f(x)$ は連続ではない。前回の Riemann（リーマン）和の定義を思い出すと、閉区間 $[0,1]$ のどんな分割 Δ を取っても、各小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ には有理数も無理数も含まれる。したがって、ξ_i として常に有理数を取ってくれれば、Riemann 和の値は 1 になるし、ξ_i として常に無理数を取ってくれれば、Riemann 和の値は 0 になる。すなわち、面積 (定積分) の値が確定しないということになる。

Riemann 和

$f(x)$: 閉区間 $[a,b]$ 上の関数 (連続とは限らない)

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b : [a,b]$ の分割

各 $1 \le i \le n$ に対し、区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の点 ξ_i をひとつ (自由に) 取る



分割 Δ と点の集合 $\{\xi_i\}$ に対し、

$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i)\cdot \Delta x_i}_{\text{長方形の面積}} \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

とおき、これを Riemann 和という。これは Δ と ξ_i に依存して決まる。Riemann 和は、$f(x)$ のグラフの囲む領域を近似する長方形たちの面積の和で、“グラフの囲む面積” の近似値と考えられる。