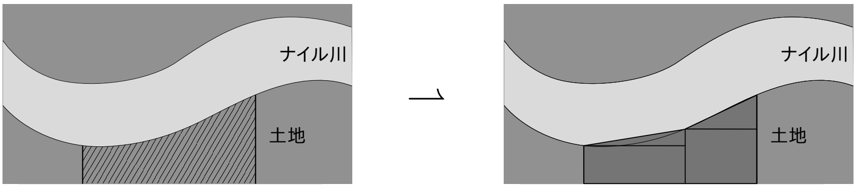
⋆ 重積分 — 2 変数関数 $f(x, y)$ の積分 —

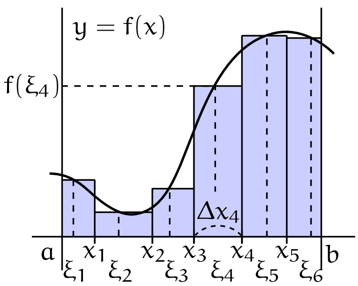
求積の基本的なアイディアは・・・

面積を測るためのアイディア — 古代エジプトの測量術 (c.f. 授業初日のプリント)

測りたい領域を面積のよくわかっている図形 (長方形、三角形など) で近似する



▷ 1 変数関数 $f(x)$ の積分の場合 (復習)

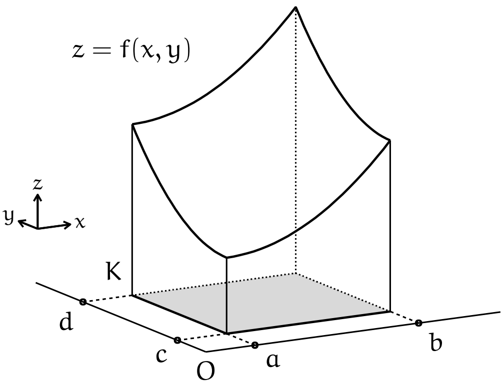


$f(x)$ で囲まれる面積 S を、長方形の面積で近似し極限を取って決めた:

$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})}_{\text{長方形の面積}} \qquad \text{(Riemann 和)}$$

$$S = \lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta, \{\xi_i\}) \quad \text{(分割 } \Delta \text{ を細かくする極限)}$$

▷ 2 変数関数 $f(x, y)$ の積分の場合



左図は長方形

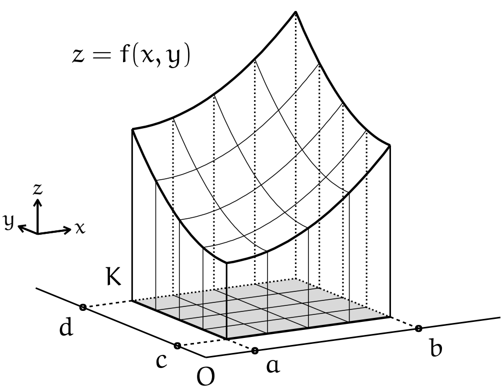
$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d \right\}$$
$$= [a, b] \times [c, d] \text{ (とも書く)}$$

上の 2 変数関数 $f(x, y)$ のグラフである。

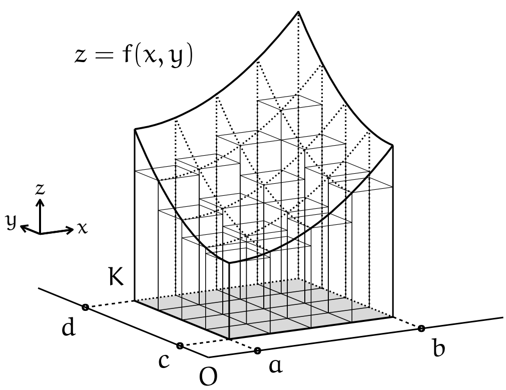
関数 $f(x, y)$ と長方形 K で囲まれる図形の体積 V をどのように測ったらよいだろうか？

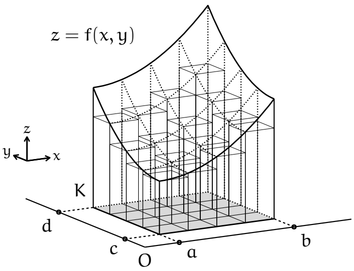
⇝ 1 変数と同様に、**直方体たちで体積 V を近似すればよい**

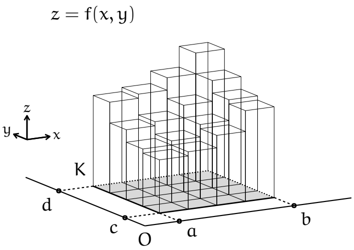
⇂ 底面 K を分割して…



⇀ 直方体で近似







重積分の Riemann 和による定義

長方形 $K=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ を細かく分割:

$$\Delta:\ \begin{array}{l} a=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=b \\ c=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=d \end{array}$$

各長方形 $K_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ に対し、K_{ij} の点 (ξ_{ij},η_{ij}) を取り、底面を K_{ij}、高さを $f(\xi_{ij},\eta_{ij})$ とする直方体たちで近似する:

$$V(\Delta,\{\xi_{ij},\eta_{ij}\})=\sum_{1\le i\le m}\sum_{1\le j\le n}\underbrace{f(\xi_{ij},\eta_{ij})\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(y_j-y_{j-1})}_{\text{直方体の体積}}$$

$$V=\lim_{|\Delta|\to 0}V(\Delta,\{\xi_{ij},\eta_{ij}\})\quad(\text{分割 }\Delta\text{ を細かくする極限})$$

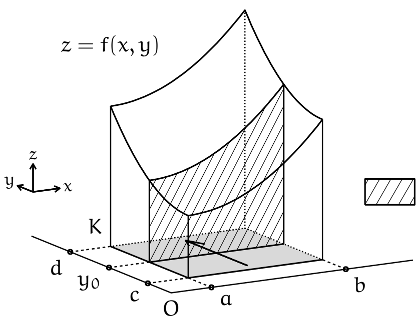
この極限 V が存在するとき、$f(x,y)$ **は** K **上積分可能である**といい、値 V を

$$(V=)\iint_K f(x,y)\,dxdy$$

と書き、$f(x,y)$ **の** K **上の重積分**という。

$f(x,y)$ が K 上連続のときは必ず積分可能で、以下、常に f の連続性を仮定することにする。また、重積分 $\displaystyle\iint_K f(x,y)\,dxdy$ は次の累次積分により計算する:

⋆ 累次積分



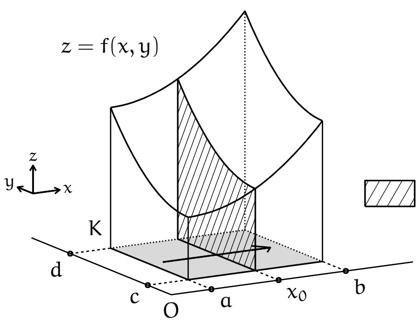
$= \int_a^b f(x,y_0)\,dx$

y_0 を止める毎に $f(x,y_0)$ を x について積分する:

$$F(y_0)=\int_a^b f(x,y_0)\,dx\quad(c\le y_0\le d)$$

これをさらに y_0 について積分したものを**累次積分**という:

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy=\int_c^d F(y)\,dy$$



$= \int_c^d f(x_0,y)\,dy$

x_0 を止める毎に $f(x_0,y)$ を y について積分する:

$$G(x_0)=\int_c^d f(x_0,y)\,dy\quad(a\le x_0\le b)$$

これをさらに x_0 について積分したものを**累次積分**という:

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^b G(x)\,dx$$

実は、重積分と 2 つの累次積分は一致する (積分する変数の順序に依らない) :

$$\iint_K f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

したがって、重積分を求めるには、どちらか一方の累次積分を計算すればよい (ただし、積分する変数の順序によって積分計算の難しさが大きく変わる場合がある)。