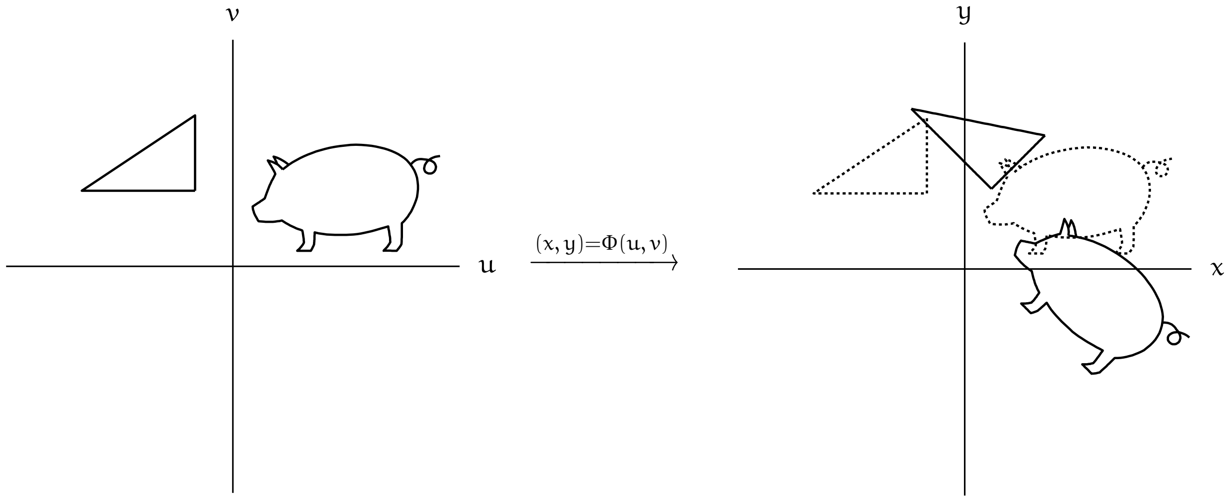
⋆ 変数変換の例

(a) $x = u\cos\theta - v\sin\theta,\ y = u\sin\theta + v\cos\theta\ (0 \le \theta \le 2\pi)$
原点の周りを反時計回りに θ だけ回転させる写像である (下図は $\theta = -\frac{\pi}{4}$)。これを行列で表わすことができる (すなわち、線形写像である) :

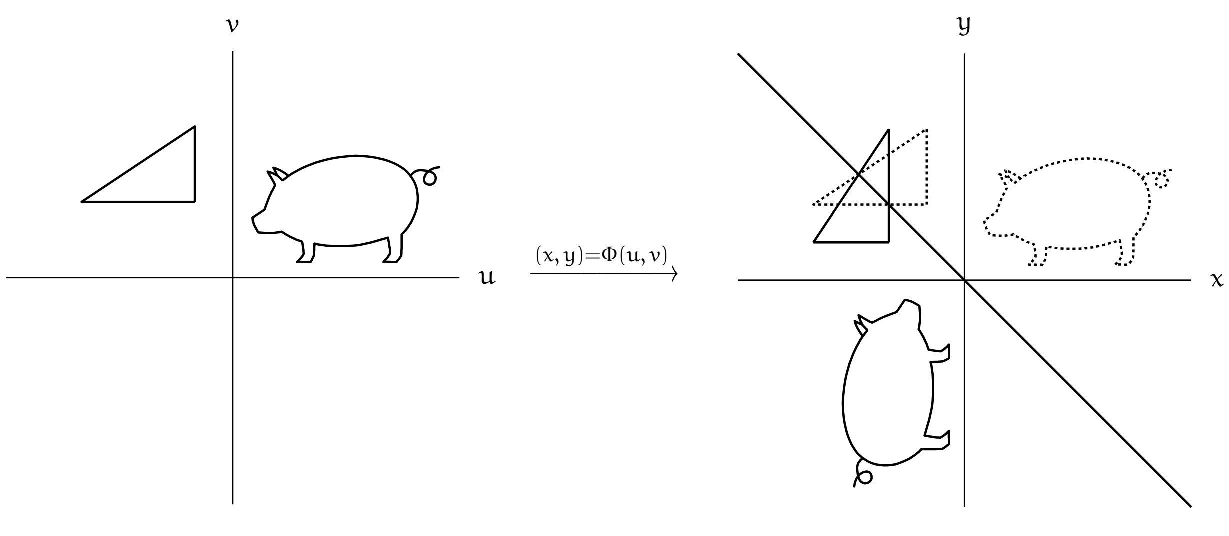
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$



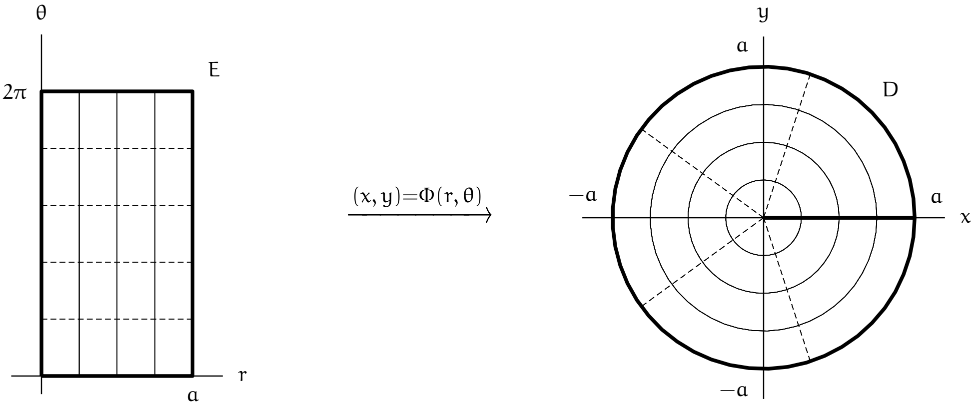
(b) $x = u - \dfrac{2\alpha(\alpha u + \beta v)}{\alpha^2+\beta^2},\ y = v - \dfrac{2\beta(\alpha u + \beta v)}{\alpha^2+\beta^2}\ (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})$

ベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ と直交する直線 $\alpha u + \beta v = 0$ に対し対称に移す写像で (下図は $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)、これを**鏡映変換**という。これをベクトルで表すと、$\mathbf{X} = \mathbf{U} - \dfrac{2\,\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}}\boldsymbol{w}$, ここで、$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. これも行列の形にかける (すなわち、線形写像である) :

$$\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} & -\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \\ -\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} & \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \\ v \end{pmatrix}$$



(c) 極座標変換 $x = r\sin\theta$, $y = r\sin\theta$.
ただし、$E = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\}$ $(a>0)$.
よく使われる変数変換。$\theta=$ (一定) の線分 (破線) と $r=$ (一定) の線分 (実線) がどのように移るかよく考えてみてほしい。また、上の 2 例とは違い、行列で表わすことはできない (線形写像ではない)。



(d) $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. ただし、$E = \{(x,y) \mid u \ge 0,\ v \ge 0\}$, $D = \{(x,y) \mid y \ge 0\}$.
これを複素座標平面 $z = u + iv$ で考えると、$f(z) = z^2$ と表せられ、原点の周りを回りながら、原点方向に向かって伸縮するような写像となる ($z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と書くと、$f(z) = r^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta)$)。また、この写像は図形の角度を保つため、**等角写像**と呼ばれる。実際、格子を写像で移すと歪んでしまうが、直角は保たれている。また、三角形の角度も保たれていることがわかる。これもまた線形写像ではない。