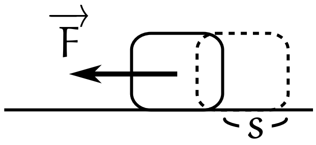
線積分 $\int_C P\,dx + Q\,dy$ **の物理的なイメージ** (アバウトな話です、雰囲気だけ)

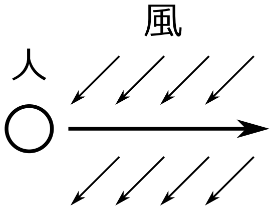


物体を一定の力 F で s メートルだけ動かす仕事 W は

$$W = F \times s$$

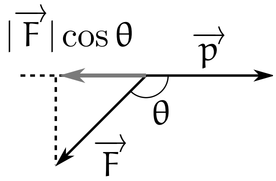
※ “仕事” とは物理の用語で、力を加えることによって物体が動いたときのエネルギーの移り変わりを指した言葉

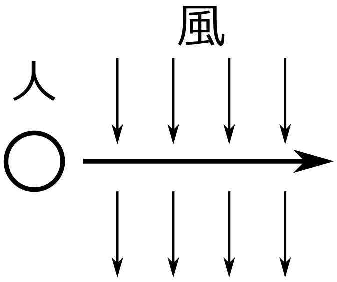
今、外を歩いたときに風から受ける抵抗の力 $\overrightarrow{F}$ のなす仕事を考える:



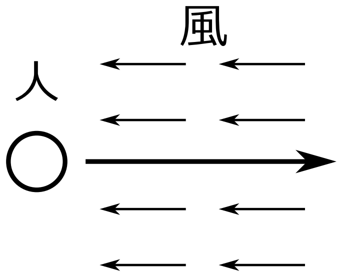
一定の風向き $\overrightarrow{F}$ のなかをベクトル $\overrightarrow{p}$ の方向にまっすぐ歩く場合、風から受ける抵抗力のなす仕事 W は

$$W = (|\overrightarrow{F}|\cos\theta) \times |\overrightarrow{p}| = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{p} \quad (\text{内積})$$

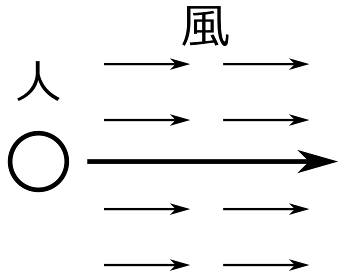




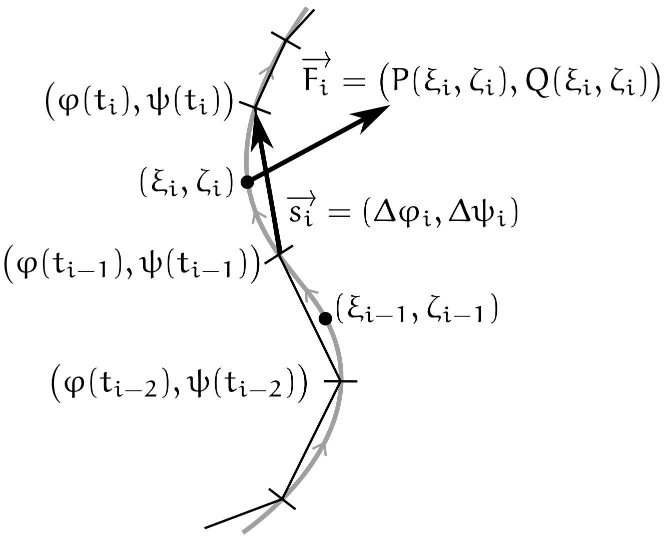
風を横切る。風から受ける抵抗力とそれがなす仕事はない：
$W = 0$



向かい風。風から受ける抵抗力のなす仕事は最大で、歩くのがつらい：
$W < 0$



追い風。風から受ける抵抗力のなす仕事は最小で、歩くのが楽になる：
$W > 0$



もっと一般化して、平面の各点 (x, y) で風 $\overrightarrow{F} = \big(P(x, y), Q(x, y)\big)$ が吹いていて、その中を人が (有向) 曲線 C に沿って歩くとき、風から受ける抵抗力のなす仕事 W は

$$\begin{aligned}
W &\sim \sum_i \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{s_i} \\
&\sim \sum_i \Big(P\big(\xi_i, \zeta_i\big),\, Q\big(\xi_i, \zeta_i\big)\Big) \cdot \Big(\Delta\varphi_i,\, \Delta\psi_i\Big) \\
&\sim \sum_i P\big(\xi_i, \zeta_i\big)\,\Delta\varphi_i + Q\big(\xi_i, \zeta_i\big)\,\Delta\psi_i \\
&\sim \sum_i P\big(\xi_i, \zeta_i\big)\,\varphi'(t_{i-1})\,\Delta t_i + Q\big(\xi_i, \zeta_i\big)\,\psi'(t_{i-1})\,\Delta t_i
\end{aligned}$$

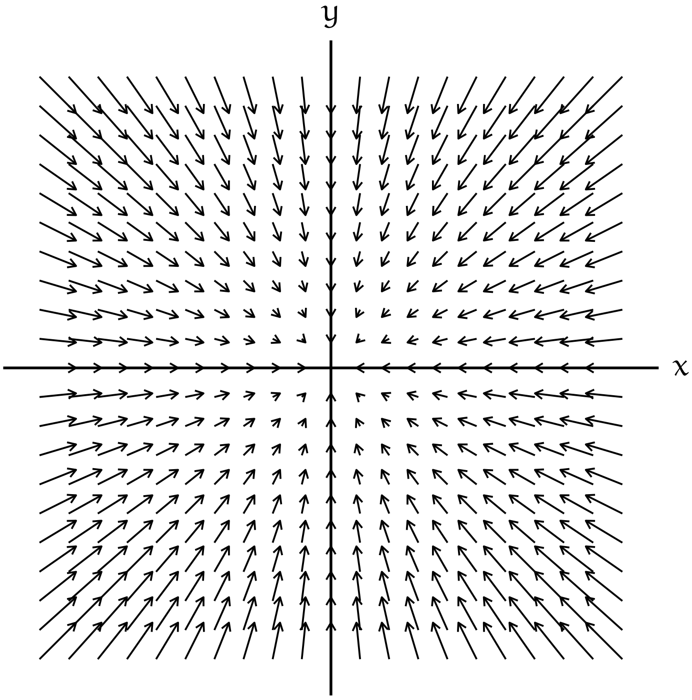
ここで、

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi_i &= \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \sim \varphi'(t_{i-1})\,\Delta t_i, \\
\Delta\psi_i &= \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) \sim \psi'(t_{i-1})\,\Delta t_i.
\end{aligned}$$

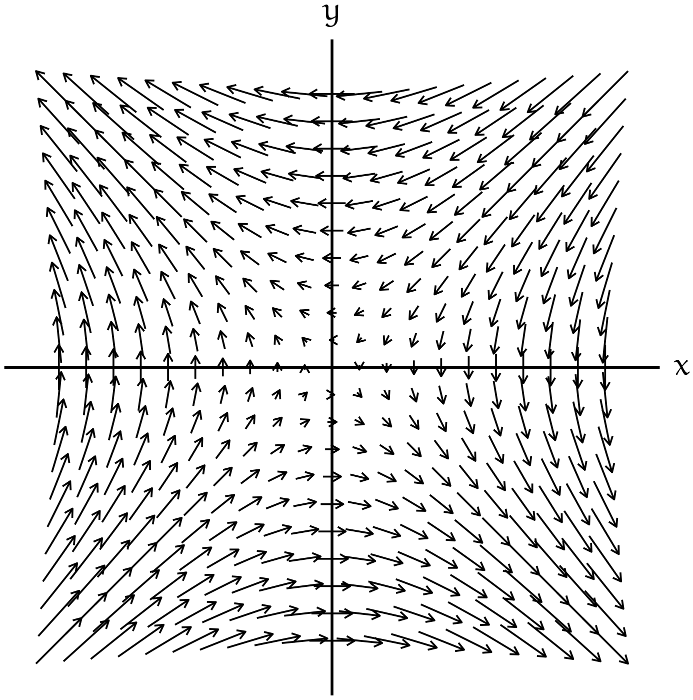
曲線を分割して、折れ線で近似すれば折れ線のところでは上記のベクトルの内積により風のなす仕事を求められる。そして、それを全ての折れ線で足しあわせて分割の極限を取ることで、有向曲線 C 上を歩いたときの風のなす仕事 W を得る (Riemann 和と同じアイディア)

$$(W=)\ \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_a^b P\bigl(\varphi(t),\psi(t)\bigr)\varphi'(t)\,dt + \int_a^b Q\bigl(\varphi(t),\psi(t)\bigr)\psi'(t)\,dt$$

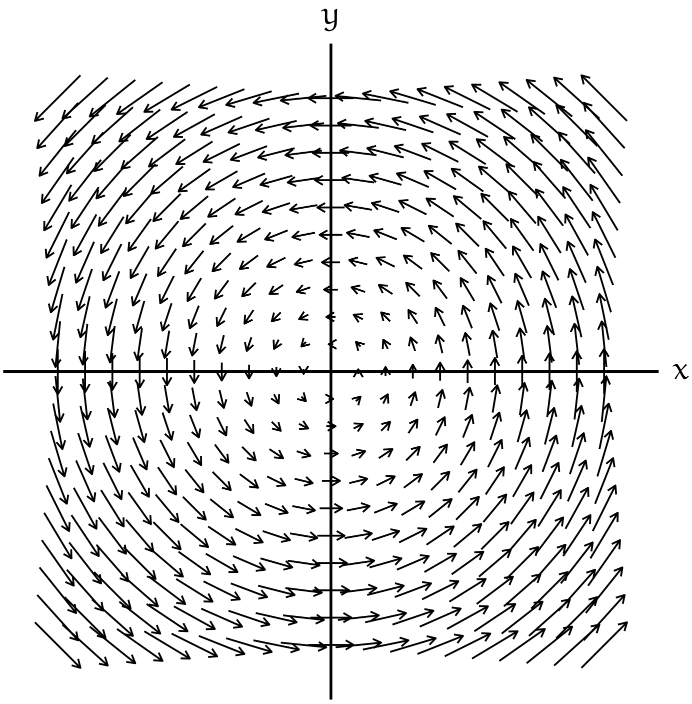
を**有向曲線** C **に沿ったベクトル場** $X(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ **の線積分**という。ここで、ベクトル場 X とは、平面の各点 (x,y) にベクトル $X(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ を対応させるものである。下に、いくつかベクトル場の例を図示した。矢印が大きい場所ほど、その点での力が大きい。



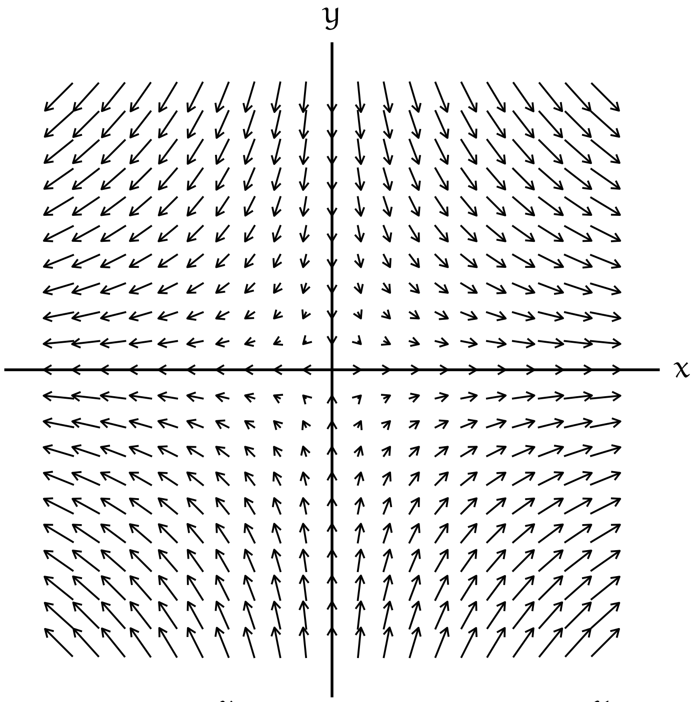
$P(x,y)=-x,\quad Q(x,y)=-y$



$P(x,y)=-y,\quad Q(x,y)=-x$



$P(x,y)=-y,\quad Q(x,y)=x$



$P(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+4}},\quad Q(x,y)=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$