演習問題　2016/01/13

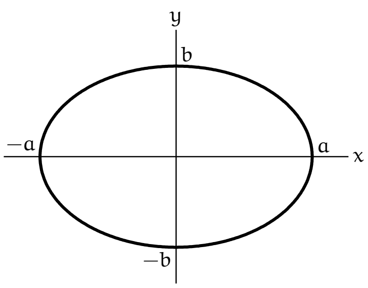
1. Green の定理を利用して、次で与えられる曲線で囲まれる領域の面積を求めよ:

   (1) 方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,\ b>0)$ と表せられる曲線を楕円といい、$C: x=a\cos t,\ y=b\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$ とパラメータ表示できる。楕円で囲まれる領域の面積を求めよ。

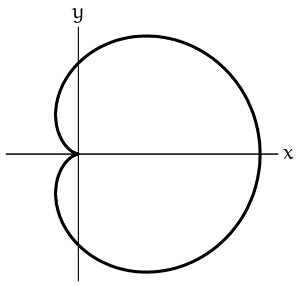
   (2) 極座標表示で $r=1+\cos\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ により定義される曲線を Cardioid という。Cardioid で囲まれる領域の面積を求めよ。

   (3) $x=\dfrac{1}{2}\sin\theta\sin^3\dfrac{\theta}{2},\ y=\cos\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ により定義される曲線を teardrop curve という。teardrop curve で囲まれる領域の面積を求めよ。(曲線の向きに注意せよ)

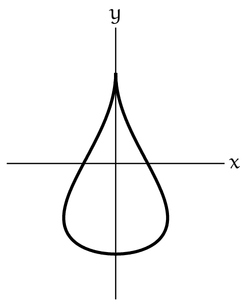
   (4) $C: x=\cos t-\dfrac{\sin^2 t}{\sqrt{2}},\ y=\cos t\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$ と表せられる曲線を fish curve という。fish curve で囲まれる領域の面積を求めよ。ただし、$t=t_0$ のときの fish curve 上の点を $C(t_0)$ と書くことにすると、$A=C(0)=C(2\pi)$, $B=C(\frac{\pi}{2})=C(\frac{3\pi}{2})$, $D=C(\frac{3\pi}{4})$, $E=C(\frac{5\pi}{4})$ である。(頭と尻尾の方の 2 つの領域に分けて考えよ。また、曲線の向きに注意せよ)



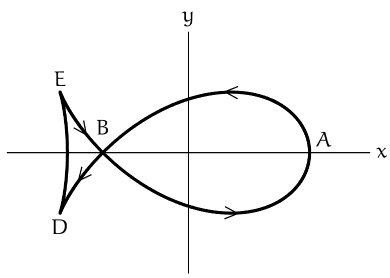
楕円



Cardioid



teardrop curve



fish curve

2. $P(x,y)=x-y\sin x,\ Q(x,y)=\cos x-y^2$ とおく。

   (1) 任意の単純閉曲線 C に対して、線積分 $\displaystyle\int_C P\,dx+Q\,dy$ の値が 0 になることを示せ。

   (2) 始点を原点 $(0,0)$、終点を点 (x,y) とする有向曲線 $\widetilde{C}$ を考える。前問より、線積分 $\displaystyle\int_{\widetilde{C}} P\,dx+Q\,dy$ の値は、このような曲線 $\widetilde{C}$ の取り方に依らず決まる。したがって、関数 $\varphi(x,y)$ を次のように定義することができる:

   $$\varphi(x,y)=\int_{\widetilde{C}} P\,dx+Q\,dy$$

   この関数 $\varphi(x,y)$ を具体的に求めよ。($\widetilde{C}$ の取り方に依らずに線積分の値が決まるので、$\widetilde{C}$ として折れ線など簡単な曲線でこの線積分を計算すると良い)

   (3) 前問で求めた $\varphi(x,y)$ は

   $$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y),\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y)$$

   を満たすことを示せ。