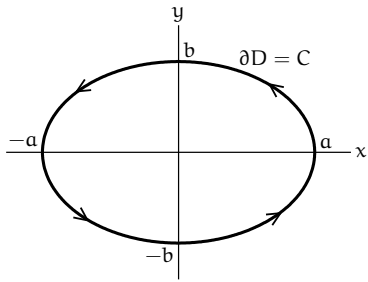


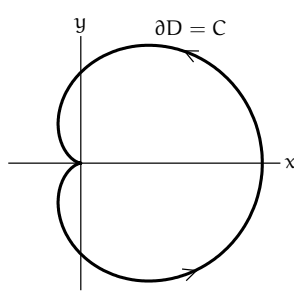
1. Green の定理より得られる公式

$$S = \int_{\partial D} x \, dy = \int_{\partial D} -y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y \, dx + x \, dy$$

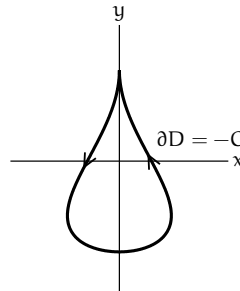
を利用する。計算しやすい方の式を使えばよい。



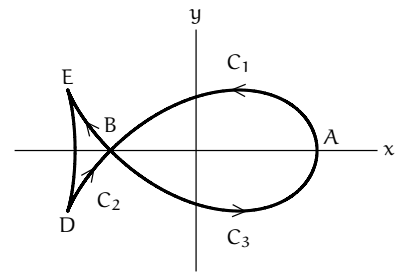
楕円



cardioid



teardrop curve



fish curve

- (1) 図のように、(Green の定理で定める) 楕円の囲む領域 D の境界 ∂D は、 $\partial D : x = a \cos t, y = b \sin t$, 向き $t : 0 \rightarrow 2\pi$ となる。このとき、 ∂D 上 $dy = b \cos t \, dt$ となるから、

$$S = \int_{\partial D} x \, dy = \int_0^{2\pi} a \cos t \cdot b \cos t \, dt = ab \pi.$$

- (2) 図のように、cardioid の囲む領域 D の境界 ∂D は、 $\partial D : x = (1 + \cos \theta) \cos \theta, y = (1 + \cos \theta) \sin \theta$, 向き $t : 0 \rightarrow 2\pi$ となる。このとき、 ∂D 上 $dy = (-\sin \theta \cdot \sin \theta + (1 + \cos \theta) \cdot \cos \theta) \, d\theta = (2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1) \, d\theta$ となるから、

$$x \, dy = (1 + \cos \theta) \cos \theta \cdot (2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1) \, d\theta = (2 \cos^4 \theta + 3 \cos^3 \theta - \cos \theta) \, d\theta$$

ここで、

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} (\sin \theta)' \cos^3 \theta \, d\theta = \left[\sin \theta \cos^3 \theta \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot 3 \cos^2 \theta \cdot (-\sin \theta) \, d\theta = 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta - 3I$$

となるから、 $4I = 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = 3\pi$ 。したがって、

$$S = \int_{\partial D} x \, dy = \int_0^{2\pi} (2 \cos^4 \theta + 3 \cos^3 \theta - \cos \theta) \, d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

- (3) teardrop curve の囲む領域 D の境界 ∂D は、 $\partial D : x = \frac{1}{2} \sin \theta \sin^3 \frac{\theta}{2}, y = \cos \theta$, 向き $t : 2\pi \rightarrow 0$ となる (曲線とは逆向き)。このとき、 ∂D 上 $dy = -\sin \theta \, d\theta$ となるから、

$$x \, dy = -\frac{1}{2} \sin \theta \sin^3 \frac{\theta}{2} \cdot \sin \theta \, d\theta = -2 \left(\sin^5 \frac{\theta}{2} - \sin^7 \frac{\theta}{2} \right) \, d\theta$$

ここで、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} \sin^n \frac{\theta}{2} \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-2 \cos \frac{\theta}{2} \right)' \sin^{n-1} \frac{\theta}{2} \, d\theta \\ &= \left[-2 \cos \frac{\theta}{2} \sin^{n-1} \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \left(-2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \cdot (n-1) \sin^{n-2} \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

となるから、漸化式 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \ (n \geq 2)$ を得る。したがって、 $I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{32}{15}, I_7 = \frac{6}{7} I_5 = \frac{192}{105}$ となるから、

$$S = \int_{\partial D} x \, dy = \int_{2\pi}^0 -2 \left(\sin^5 \frac{\theta}{2} - \sin^7 \frac{\theta}{2} \right) \, d\theta = \frac{64}{105}$$

- (4) 図のように、fish curve の境界 ∂D は、曲線のパラメータ付けと境界の向きとの違いに注意して、

$$\partial D = C_1 + C_2 + C_3$$

$$C_1 : x = \cos t - \frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}}, y = \cos t \sin t, \text{ 向き } t : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$C_2 : x = \cos t - \frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}}, y = \cos t \sin t, \text{ 向き } t : \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$C_3 : x = \cos t - \frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}}, y = \cos t \sin t, \text{ 向き } t : \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$$

となる。 ∂D 上 $dx = (-\sin t - \sqrt{2} \sin t \cos t) dt$ だから、 $-y dx = (\cos t \sin^2 t + \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} \cos 4t) dt$ 。今、

$$F(t) = \int \left(\cos t \sin^2 t + \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} \cos 4t \right) dt = \frac{1}{3} \sin^3 t + \frac{\sqrt{2}}{8} t - \frac{\sqrt{2}}{32} \sin 4t$$

とおく。

頭 ($C_1 + C_3$ で囲まれる部分) と尻尾 (C_2 で囲まれる部分) の2つの領域に分けて Green の定理 (上の公式) を適用する:

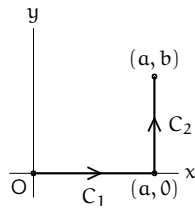
$$\begin{aligned} S &= \int_{C_1+C_3} -y dx + \int_{C_2} -y dx \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right) \left(\cos t \sin^2 t + \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8} \cos 4t \right) dt \\ &= \left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) \right) + \left(F(2\pi) - F\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) + \left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) \\ &= 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2F\left(\frac{3\pi}{2}\right) + F(2\pi) - F(0) \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

ここで、第3式は、一般に $\left(\int_a^b + \int_c^d \right) f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_c^d f(t) dt$ を意味する記法です。

2. (1) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin x$ となり、Green の定理から、任意の単純閉曲線 C に対して、線積分 $\int_C P dx + Q dy = 0$ になる。すなわち、 C で囲まれる領域 D 上 P, Q は Green の定理の仮定を満たし、 ∂D と C の向きが一致してるとすると、(逆の向きの場合でも以下の式で $-C$ とすればいい)。Green の定理から、

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D (\sin x - \sin x) dx dy = 0.$$

- (2) ここでは、始点を原点 $(0, 0)$ 、終点を点 (a, b) とする図のような折れ線を考える:



$$C_1 : x = t, y = 0, \quad \text{向き } t : 0 \rightarrow a$$

$$C_2 : x = a, y = t, \quad \text{向き } t : 0 \rightarrow b$$

C_1 上 $dx = dt, dy = 0$, C_2 上 $dx = 0, dy = dt$ となるから、

$$\varphi(a, b) = \int_{C_1+C_2} P dx + Q dy = \int_0^a t dt + \int_0^b (-t^2 + \cos a) dt = \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{3} b^3 + b \cos a.$$

すなわち、 $\varphi(x, y) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} y^3 + y \cos x$

- (3) (2) で求めた $\varphi(x, y)$ について確かめればよい。

Green の定理の仮定を満たし、 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ となる一般のベクトル場 $(P(x, y), Q(x, y))$ に対しても同様に $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y)$ を満たす関数 $\varphi(x, y)$ を作る事ができる。これは関数 (ベクトル場) P, Q がただひとつの関数 φ に依って決まるという特殊な状況になっていて、閉曲線に沿った線積分 $\int_C P dx + Q dy$ の値は常に 0 になっている。物理では、このようなベクトル場 (P, Q) を保存場、 $-\varphi$ をスカラーポテンシャルといい、物理的にも重要な意味がある。

歩いて面積を測る話

実生活で、領域の面積 S の概算を Green の定理で求めることができる。例えば、GPS tracker (GPS を利用して現在地の緯度経度を記録する手のひらサイズの機器。最近のスマートフォンなどもそのような機能がある) を利用して、現在地の緯度経度が分かれば、測りたい領域が仮想的な xy 平面上に置かれたことになる (十分狭い領域に対しては、地球は平面とみなそう)。

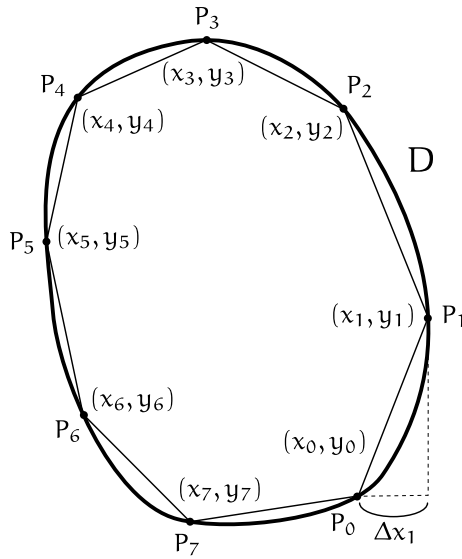
領域の境界上のいくつかの観測点 P_i ($0 \leq i \leq N$) で緯度経度 (x_i, y_i) を記録する。次に、隣り合う点の緯度の差分 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (ただし、 $P_{-1} = P_N$ とする) を計算して、次の和を計算すればよい:

$$S \approx - \sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta x_i.$$

実際、Green の定理から、 $S = - \int_C y \, dx$ となるが、観測点をどんどん取っていけば図のように領域が折れ線で十分近似されて、領域の面積 S の近似値になることが想像できると思う (Riemann 和のアイデアと同じ)。

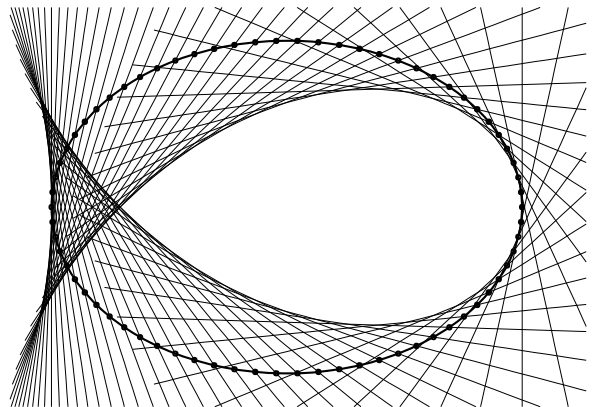
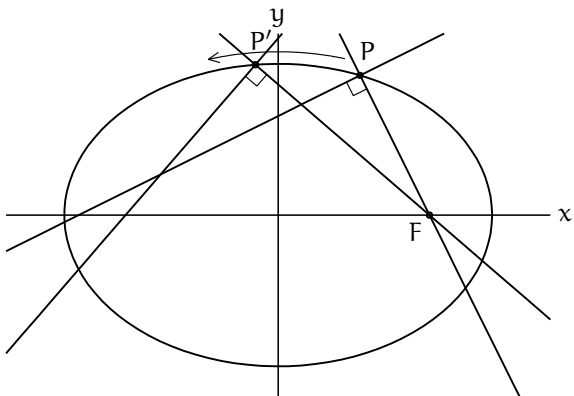
私物の GPS tracker に “Area calculation” という機能があって、どのように計算するのが気になっていましたが、Green の定理を思い出す機会を得て合点がきました (実際はどう計算してるのかわかりませんが)

(上の計算で少し補足すると、分点 $P_i = (x_i, y_i)$ を取って、弧 $P_{i-1}P_i$ 上の点 (ξ_i, ζ_i) を取る。和 $\tilde{S} = - \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_i \Delta x_i$ に対して、分割を細かくする極限を取ったものが $-\int_C y \, dx$ となる。上では簡単のため、 $\zeta_i = y_i$ とした)



楕円と fish curve

蛇足だが、楕円と fish curve の関係について触れておく。



楕円 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 0$ の焦点を $F = (1, 0)$ 、楕円上の点を P とする。点 P を通り線分 FP に直交する直線を描く (左図)。楕円上のいろんな点 P を取って、そのような直線を描いていくと、fish curve が現れる (右図)。一般に、直線 (もっと一般に曲線) の集まりに対し、それらすべてに接するような曲線を 包絡線 という。fish curve は上で考えた直線の集まりに対する包絡線である。

また、カーディオイドも包絡線として現れる。円筒の一点に光源を置く。光源から出た光が円周で反射するとき、その反射光 (直線) の作る包絡線がカーディオイドになる。実際、コーヒーを入れたカップを上から覗いてみると、カーディオイドの形をした光の筋が観察できる (2017/01/29 追記: コーヒーカップに現れるのはネフロイドです。失礼しました)。強い太陽光の下か、もしくは暗い部屋の中で上からペンライトなどを当てると観察しやすい。例えば、 “coffee cardioid” と検索してみるといくつか画像が見つかる。

