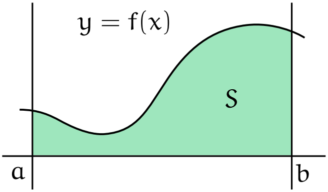
定積分の定義について

この講義資料も小テストなどと一緒にホームページ
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~yano/biseki2_2015/
に公開される

2015 年度微分積分学 II (担当:矢野充志)

高校数学では

微分を習った後に積分を習う



$f(x)$: 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数
$F(x)$: $F'(x) = f(x)$ となる関数 (原始関数、不定積分)

$F(x)$ の差 $F(b) - F(a)$ を $f(x)$ の定積分 といい、

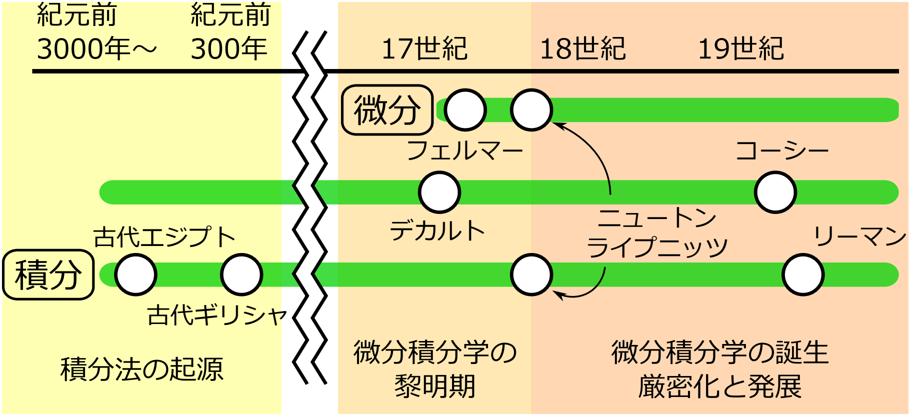
$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

と書いた。これは関数 $f(x)$ と
2 直線 $x = a$, $x = b$、x 軸の囲む面積 S に等しい。

積分は微分の逆演算

$$\int_a^b x^3 dx \underbrace{=}_{\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3} \left[\frac{1}{4}x^4\right]_a^b = \frac{1}{4}(b^4 - a^4)$$

ごく大まかな歴史

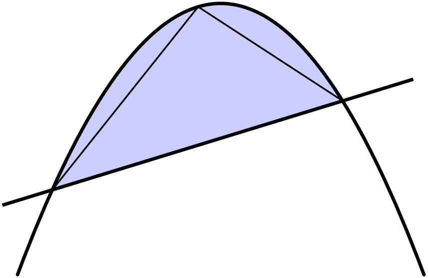

紀元前
3000年～
紀元前
300年
17世紀
18世紀
19世紀
微分
フェルマー
コーシー
デカルト
ニュートン
ライプニッツ
古代エジプト
リーマン
積分
古代ギリシャ
積分法の起源
微分積分学の
黎明期
微分積分学の誕生
厳密化と発展

ごく大まかな歴史

積分法の起源

古代エジプト: 測量術

古代ギリシャ: アルキメデスによる放物線の求積、取り尽くし法など



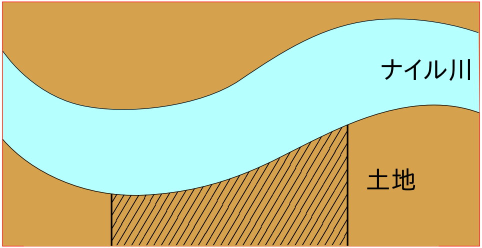
アルキメデス (紀元前 287?〜212 年) と放物線の求積

積分法 (求積) の起源

古代エジプト (紀元前 3000 年頃〜紀元前 332 年)

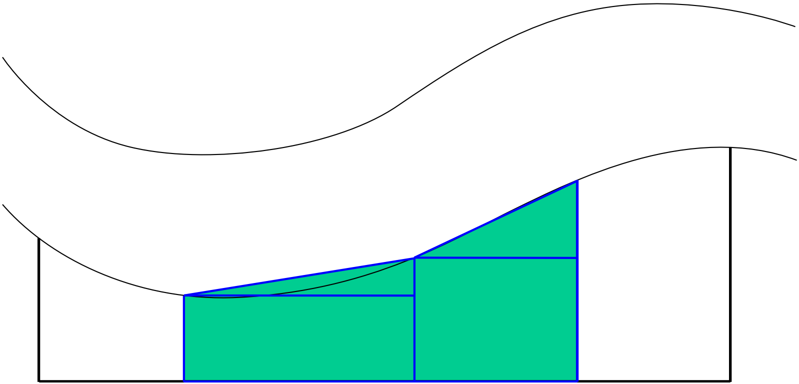
毎年起こるナイル川の氾濫により下流付近には肥沃な土地が広がる。毎年変化する農地の測量の要求により、測量術、幾何学が発達。この時代から土地の広さに応じた徴税の仕組みがあった。
また、氾濫の周期を知るために、太陽暦や天文学も発達した。

“エジプトはナイルの賜” (ヘロドトス)

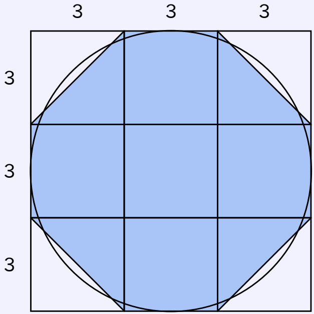


面積を測るためのアイディア

測りたい領域を面積のよくわかっている図形 (長方形、三角形など) で近似する



古代エジプト人による円の面積の求め方



一辺が 9 の正方形に内接する円

(直径 9 の円の面積)

$\fallingdotseq 5 \times$ (一辺が 3 の正方形の面積)

$+ 4 \times$ (三角形の面積)

$= 7 \times$ (一辺が 3 の正方形の面積)

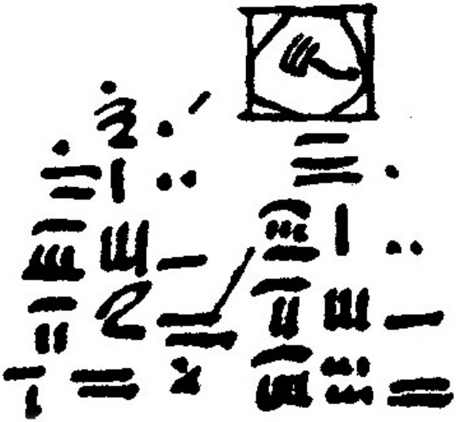
$= 63$

古代エジプト人は直径 9 の円の面積を (63 に 1 を足した) 64 とした (諸説ある)。これをもとに、円周率 π を計算してみると

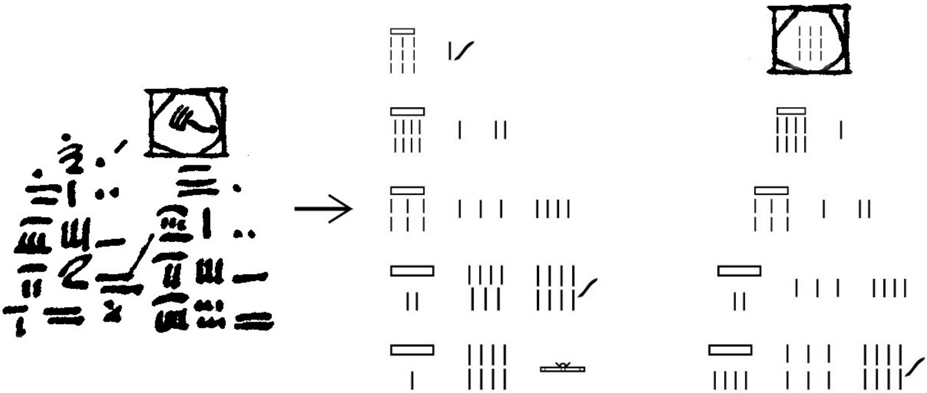
$$\pi r^2 = \pi(9/2)^2 \fallingdotseq 64$$

$$\therefore \quad \pi \fallingdotseq \frac{64 \cdot 2^2}{9^2} = 3.160493\cdots$$

リンド・パピルス (古代エジプトの数学文書、紀元前 1650 年前後)
算術、代数、幾何、測量からなる 87 の問題があり、そのうちの 48 番目

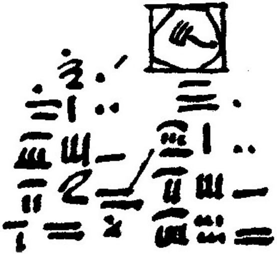


リンド・パピルス (古代エジプトの数学文書、紀元前 1650 年前後)
算術、代数、幾何、測量からなる 87 の問題があり、そのうちの 48 番目

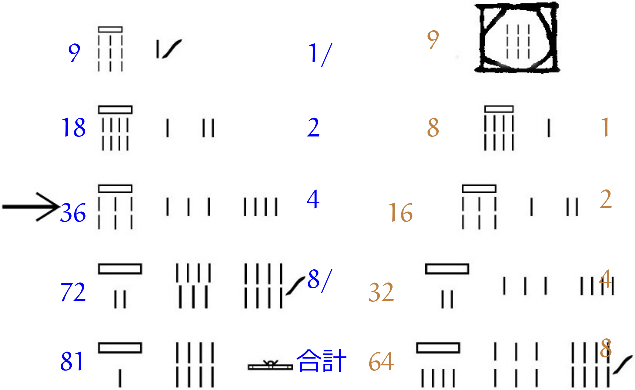


図：左がパピルスに記されたヒエラティック (神官文字)、右がこれをヒエログリフ (神聖文字) に直したもの

リンド・パピルス (古代エジプトの数学文書、紀元前 1650 年前後)
算術、代数、幾何、測量からなる 87 の問題があり、そのうちの 48 番目



“ 右から左に読む ”　正方形に内接する円



内接する円を 1 辺が $8(=9-9\times\frac{1}{9})$ の正方形をみなしている？

参考サイト

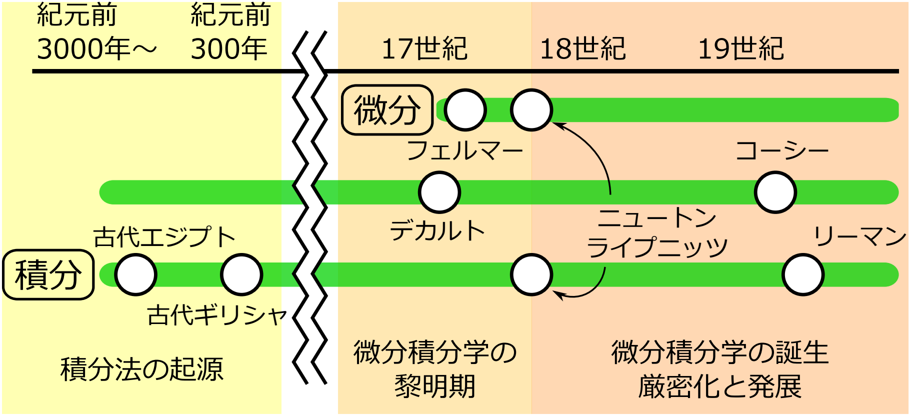
- リンド数学パピルスと古代エジプトの数学

  http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/museum/RhindPapyrus/index.htm

- Géométrie dans l'Égypte antique

  http://fr.m.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9om%C3%A9trie_dans_l%27%C3%89gypte_antique

ごく大まかな歴史


紀元前
3000年〜
紀元前
300年
17世紀
18世紀
19世紀
微分
フェルマー
コーシー
デカルト
ニュートン
ライプニッツ
リーマン
古代エジプト
積分
古代ギリシャ
積分法の起源
微分積分学の
黎明期
微分積分学の誕生
厳密化と発展

ごく大まかな歴史

微分積分学の黎明期

デカルト: 直交座標系の考案、座標幾何

フェルマー: 曲線の接線、極大・極小法、座標幾何

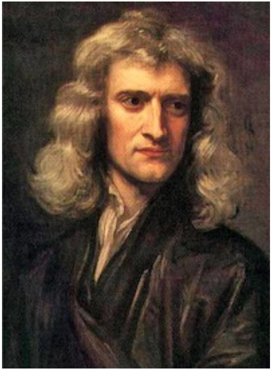
$\longrightarrow$ 座標の概念が後の微積分学の発展につながる

デカルト (1596〜1650 年) とフェルマー (1601〜1665 年)

ごく大まかな歴史

微分積分学の誕生、厳密化と発展

ニュートン，ライプニッツ：微分積分学の創始。無限小・無限大の概念、微分積分学の基本定理など



ニュートン (1642〜1727 年) とライプニッツ (1646〜1716 年)

ごく大まかな歴史

微分積分学の誕生、厳密化と発展

コーシー: 関数の連続、極限に関する貢献。ϵ-δ 論法の元となるアイディア。極限を厳密かつ明確に論じることができるようになった

リーマン: 定積分の厳密な定式化

コーシー (1789〜1857 年) とリーマン (1826〜1866 年)

ごく大まかな歴史

一方、江戸時代の日本では、西洋とは異なる独自の数学 "和算" が発達した。代表的な人物の一人は関孝和 (?〜1708 年)。和算の開祖と言われる。方程式論、ベルヌーイ数の発見、暦術に関する業績がある。円周率を小数点第 12 位まで求める。世界に先んじて、行列式の概念を定義したことでも有名。

和算は芸としての方向へと進み、その技術は高い水準にありながらも学問として成熟せず、西洋の数学に後れを取っていくことになる。

関孝和

ごく大まかな歴史

- 映画「天地明察」

  天文と算術をこよなく愛する碁打ち、安井算哲 (のちの渋川春海) 。算術と天体観測をもとに、大陸から伝わり 800 年以上使われ続けてきた当時の暦、宣命暦の間違いを正し、日本独自の暦を制定するために奮闘する生き様を描いた時代小説が原作の作品。関孝和も登場する。

©角川映画

- 小説「算法少女」(遠藤寛子、ちくま学芸文庫)

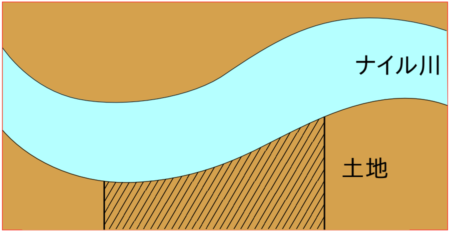
  父の指導により少女ながら算法に秀でた町娘・あき。算法の問題が書かれた絵馬 (算額) の間違いを指摘したことで、大名の目に止まり算法指南役に迎えられようとしたが、関流 (関孝和の流れを汲むとする流派) との対立を招く。その騒動の中で、自身の算法に対する新しい向きあいかたを見つける。読みやすく爽やかな歴史小説。

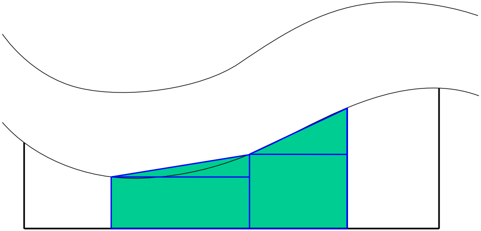
©筑摩書房

定積分の定義

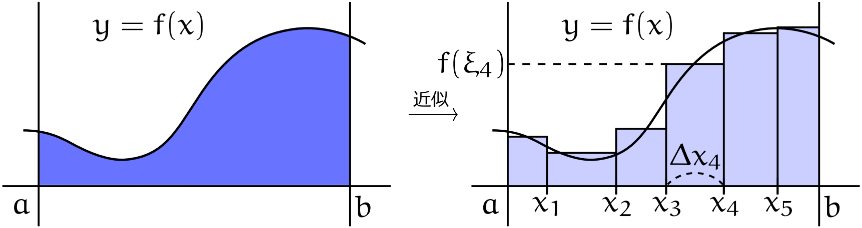
面積を測るためのアイディア

測りたい領域を面積のよくわかっている図形 (長方形、三角形など) で近似する



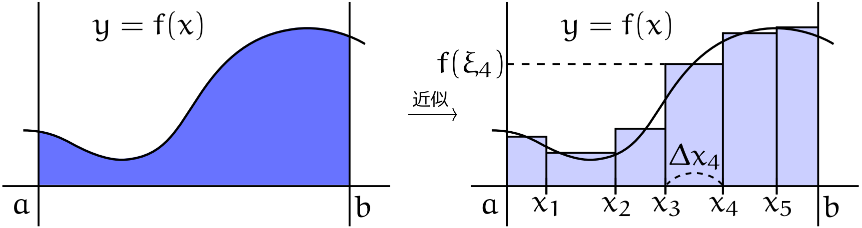


与えられた関数 $f(x)$ と x 軸、二直線 $x = a,\ x = b$ で囲まれた領域をいくつかの長方形で近似



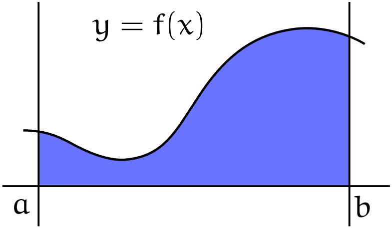
与えられた関数 $f(x)$ と x 軸、二直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた領域をいくつかの長方形で近似

さらに、できるだけ細かい長方形で近似すると囲まれた領域に近づくはず

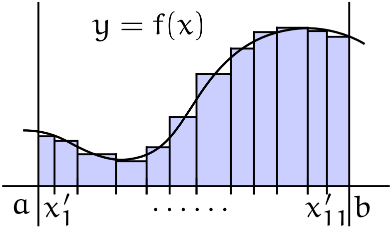


与えられた関数 $f(x)$ と x 軸、二直線 $x = a, x = b$ で囲まれた領域をいくつかの長方形で近似

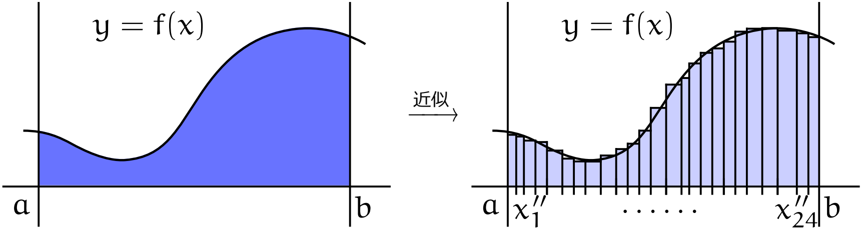
さらに、できるだけ細かい長方形で近似すると囲まれた領域に近づくはず



$\xrightarrow{\text{近似}}$

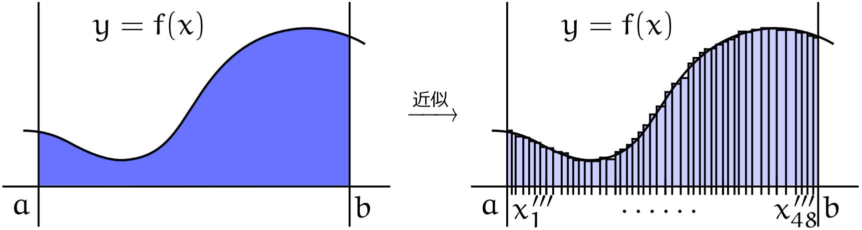


与えられた関数 $f(x)$ と x 軸、二直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた領域をいくつかの長方形で近似
さらに、できるだけ細かい長方形で近似すると囲まれた領域に近づくはず



与えられた関数 $f(x)$ と x 軸、二直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた領域をいくつかの長方形で近似

さらに、できるだけ細かい長方形で近似すると囲まれた領域に近づくはず



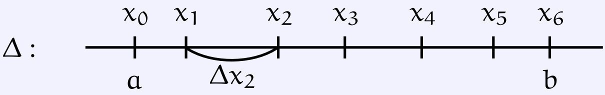
定積分を定義するためのいくつかの準備

区間の分割

n を自然数とする。閉区間 $[a,b]$ に対し、$x_0 = a$, $x_n = b$ とし、a と b の間の $n-1$ 個の相異なる点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ をとることを $[a,b]$ の n 分割 といい、

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

と書く。



また、

$$|\Delta| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

と書いて、$|\Delta|$ を 分割 Δ の幅 という。

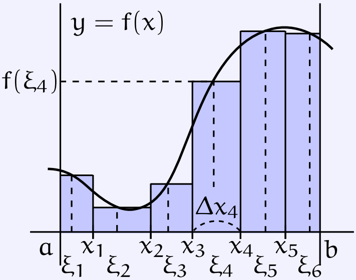
定積分を定義するためのいくつかの準備

リーマン和

$f(x)$: 閉区間 $[a, b]$ 上の関数 (連続とは限らない)

$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$: $[a, b]$ の分割

各 $1 \leq i \leq n$ に対し、区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の点 ξ_i をひとつ (自由に) 取る



分割 Δ と点の集合 $\{\xi_i\}$ に対し、

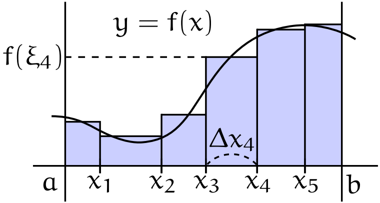
$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(\xi_i) \cdot \Delta x_i}_{\text{長方形の面積}}$$

$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

とおき、これを リーマン和 という。
(Δ と ξ_i に依存して決まる)

リーマン和は、$f(x)$ のグラフの囲む領域を近似する長方形たちの面積の和で、“グラフの囲む面積” の近似値と考えられる。

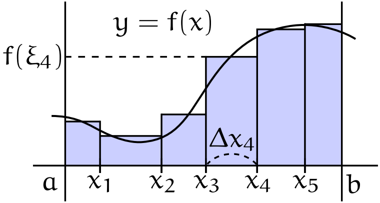
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_5 < x_6 = b$ を閉区間 $[a, b]$ の分割とする。



$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{6} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

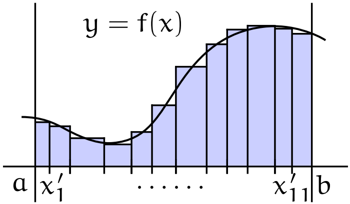
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_5 < x_6 = b$ を閉区間 $[a, b]$ の分割とする。



$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{6} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

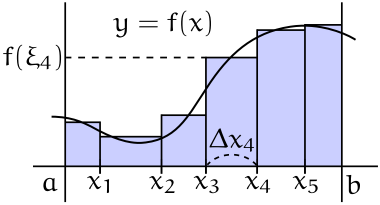
$\downarrow$ Δ より小さな幅の分割 Δ' を取る $\downarrow$



$$S(\Delta', \{\xi_i'\}) = \sum_{i=1}^{12} f(\xi_i') \cdot \Delta x_i'$$

$$(\Delta x_i' = x_i' - x_{i-1}')$$

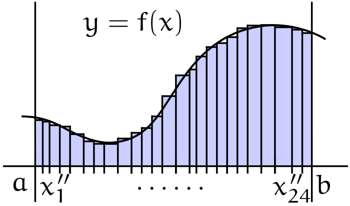
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_5 < x_6 = b$ を閉区間 $[a, b]$ の分割とする。



$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{6} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

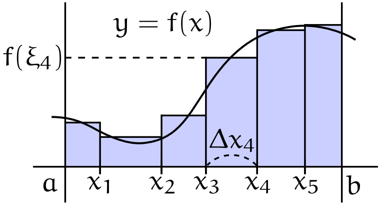
$\downarrow$ さらに、Δ' より小さな幅の分割 Δ'' を取る $\downarrow$



$$S(\Delta'', \{\xi_i''\}) = \sum_{i=1}^{25} f(\xi_i'') \cdot \Delta x_i''$$

$$(\Delta x_i'' = x_i'' - x_{i-1}'')$$

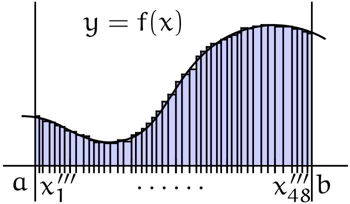
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_5 < x_6 = b$ を閉区間 $[a, b]$ の分割とする。



$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{6} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

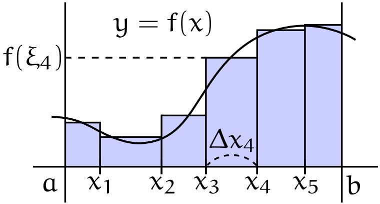
↓ さらに、Δ'' より小さな幅の分割 Δ''' を取る ↓



$$S(\Delta''', \{\xi_i'''\}) = \sum_{i=1}^{49} f(\xi_i''') \cdot \Delta x_i'''$$

$$(\Delta x_i''' = x_i''' - x_{i-1}''')$$

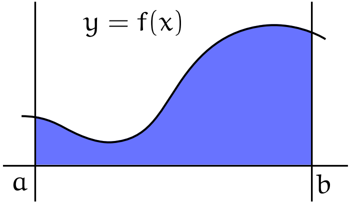
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_5 < x_6 = b$ を閉区間 $[a, b]$ の分割とする。



$$S(\Delta, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{6} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

$$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$$

↓ Δ より小さな幅の分割を次々と取っていくという極限操作 ↓



$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta, \{\xi_i\})$$

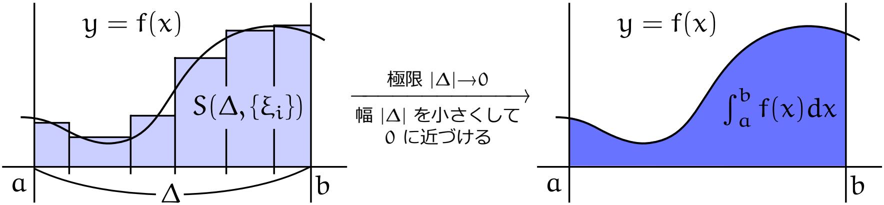
定積分の定義

$f(x)$: 閉区間 $[a,b]$ 上の関数 (連続とは限らない)

幅 $|\Delta|$ が小さくなるように $[a,b]$ の分割 Δ を取っていくと、リーマン和 $S(\Delta,\{\xi_i\})$ がある一定値 σ に近づくとき、$f(x)$ は $[a,b]$ で (リーマン) 積分可能 という。このとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sigma \qquad \left(= \lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta,\{\xi_i\})\right)$$

とおき、$[a,b]$ 上の関数 $f(x)$ の定積分 という。



定積分の定義

$f(x)$: 閉区間 $[a, b]$ 上の関数 (連続とは限らない)

幅 $|\Delta|$ が小さくなるように $[a, b]$ の分割 Δ を取っていくと、リーマン和 $S(\Delta, \{\xi_i\})$ がある一定値 σ に近づくとき、
$f(x)$ は $[a, b]$ で (リーマン) 積分可能 という。このとき、

$$\int_a^b f(x)dx = \sigma \quad \left(= \lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta, \{\xi_i\})\right)$$

とおき、$[a, b]$ 上の関数 $f(x)$ の定積分 という。

1. このような極限が収束するときはあるのか？
2. 実際に、このような極限が計算できるのか？
(リーマン和から定積分を計算できるのか？)

$f(x)$ が連続の場合は、積分可能であることが保証されている：

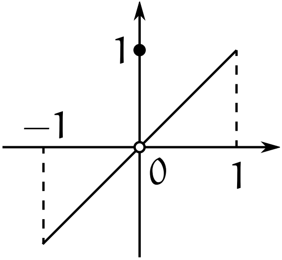
連続関数の定積分の存在 (リーマン)

$f(x)$ を閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数とするとき、どんな分割 Δ の取り方をしても、どんな点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ の取り方をしても、幅 $|\Delta|$ を小さくしていくとリーマン和 $S(\Delta, \{\xi_i\})$ は一定値に収束する。すなわち、連続関数は常に積分可能である。

実は、

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

のような非連続関数も $[-1, 1]$ 上積分可能。



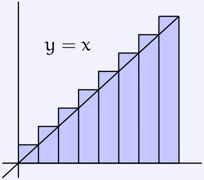
Riemann 和の具体的な計算例 $f(x) = x\ (0 \le x \le 1)$ の場合

先ほどのリーマンの定理から、連続関数の場合は積分可能で、分割 Δ の取り方に依らずに極限の計算結果が決まる。

$$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$
$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{2}{n},\ \ldots,\ x_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ x_n = 1$$
$$\xi_i = x_i \in [x_{i-1}, x_i],\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$$

とすると、リーマン和 $S(\Delta, \{\xi_i\})$ は

$$\begin{aligned} S(\Delta, \{\xi_i\}) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \to \frac{1}{2} \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$



一般には、リーマン和の計算は難しい。$f(x) = \sin x$ などどうすればいいのだろうか？どのような分割 Δ を取り、点 ξ_i を取って計算すればいいのだろうか？

微分積分学の基本定理 (ニュートン、ライプニッツ)

$f(x)$ を区間 I 上連続な関数とする。$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数 (不定積分) とすると、任意の $a, b \in I$ に対して、

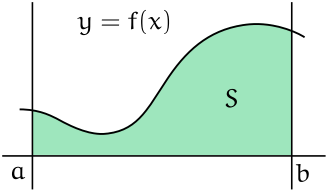
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ。

この定理により、定積分の計算が格段にしやすくなる！
分割 Δ や ξ_i の取り方を気にすることなく、あたかも "微分の逆操作" で解くことができるのが高校の数学以来の話。

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = 2$$

高校数学から今までを振り返って



$f(x)$: 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数
$F(x)$: $F'(x) = f(x)$ となる関数 (原始関数、不定積分)

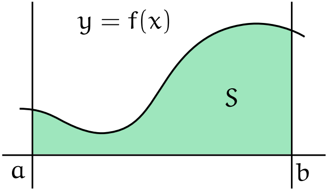
$F(x)$ の差 $F(b) - F(a)$ を $f(x)$ の定積分 といい、

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

と書いた。これがちょうど、関数 $f(x)$ と
2 直線 $x = a$, $x = b$、x 軸の囲む面積 S に等しい。

しかし、本当は ····

高校数学から今までを振り返って



連続関数 $f(x)$ と 2 直線 $x = a$, $x = b$、x 軸の囲む面積 S を定積分

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

により定義し、微分積分学の基本定理

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \bigl(F'(x) = f(x)\bigr)$$

により、積分が微分により計算ができる！

推薦書籍・参考文献等

- ゼロから学ぶ微分積分 (小島寛之、講談社)
  微分積分の意味を直感的にわかりやすく書かれた本。ときおり挟まれる対話により、微分積分学で湧き上がる疑問点にも答えている。微分も知らぬまま読んだ高校のときには、微分積分が魔法のように見えた。ニュートン・ライプニッツの時代もそうだったのだろう。
- 解析入門 (小平邦彦、岩波書店)
  微分積分学の本格的で明快な教科書。ϵ-δ 論法になれないとつらい部分があるかも。
- 微分積分学入門 (黒田紘敏さんによる電子テキスト)
  他の微分積分学の本と違い、具体例が豊富で証明も丁寧。ϵ-δ 論法の独習にも良いと思う。入手先は
  `http://www7b.biglobe.ne.jp/~h-kuroda/pdf/text_calculus.pdf`

数学者の画像は Wikimedia Commons より引用。関孝和の画像は GFDL に従う。