**小テスト第 1 回解答　2015/10/14**

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}\,dx$

“$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\qquad}\pm\sqrt{\qquad}}$” の形は有理化してみよう:

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}} = \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})} = \sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}$$

より、

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}}\,dx = \int (\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}\,)dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}}$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx$

$u=\cos x$ と変数変換すると、$du=-\sin x\,dx$ で、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx = \int_1^0 \frac{1-u^2}{1+u}(-du) = -\int_1^0 (1-u)\,du = -\left[u-\frac{1}{2}u^2\right]_1^0 = \frac{1}{2}$$

または、式変形する:

$$\frac{\sin^3 x}{1+\cos x} = \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{1+\cos x} = \sin x - \sin x\cos x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x$$

これより、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x)dx = \left[-\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

(c) $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}\,x\,dx$

部分積分するのが簡明:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Arctan}\,x\,dx &= x\,\mathrm{Arctan}\,x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx & \int f(x)\,dx = xf(x) - \int x\cdot f'(x)\,dx\\ &= x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) & \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|\end{aligned}$$

また、$u=\mathrm{Arctan}\,x$ と変数変換する方法もある。少し長くなるが、積分計算の良いトレーニングにもなるので、試みられたい。さて、$du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \dfrac{1}{1+\tan^2 u}\,dx = \cos^2 u\,dx$ となるから、

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Arctan}\,x\,dx &= \int \frac{u}{\cos^2 u}\,du & u=\mathrm{Arctan}\,x,\ du=\cos^2 u\,dx\\ &= \int u(\tan u)'\,du & \frac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)'\\ &= u\tan u - \int 1\cdot\tan u\,du & \text{部分積分}\end{aligned}$$

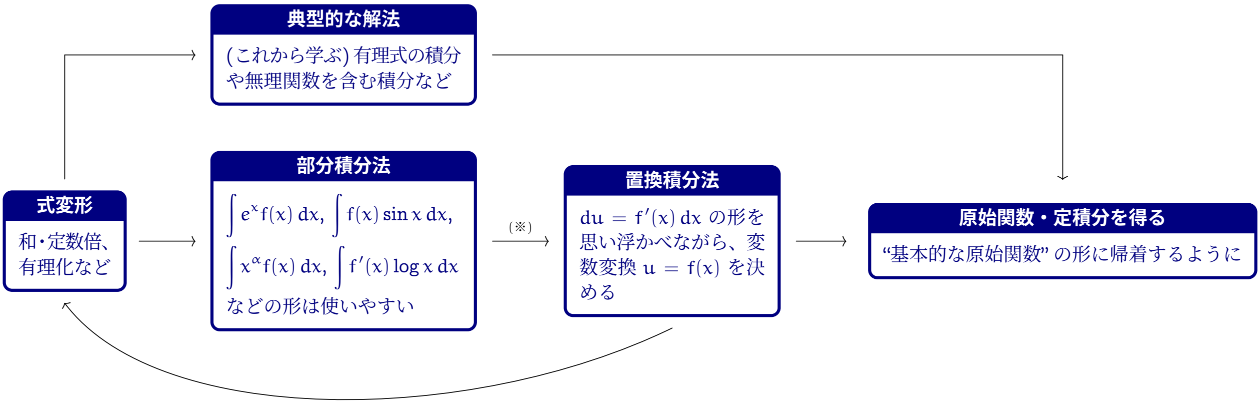
$$= u \tan u - \int \frac{-1}{t}\,dt \qquad \begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x\,dx \end{aligned}$$

$$= u \tan u + \log|t|$$

$$= x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) \qquad u,\ t \text{ を } x \text{ に戻す}$$

ここで、$\log|t| = \log|\cos u| = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{\cos^2 u} = -\frac{1}{2}\log(1+\tan^2 u) = -\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

## 積分の一般的なフローチャート




(※)…与えられた積分をどう処理してようか迷ったときは、まずは先に部分積分法を試みたほうが良いように感じる。うまい変数変換が思いつけば別だが、置換積分はよくわからない計算に迷いこむことが多い。

**よく使う形**

- ▷ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$
- ▷ $\displaystyle\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$