小テスト第 2 回解答　2015/10/21

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx$

分母の 2 次式の判別式は $D = 25 - 4\cdot 6 > 0$ より、部分分数分解する (**Case1(Step2)**) :

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \text{ (とおくと)}$$
$$= \frac{(A+B)x-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)}$$

係数を比較して、$A+B=1$, $3A+2B=0$. これを解いて、$A=-2$, $B=3$. したがって、

$$\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{-2}{x-2}\,dx + \int \frac{3}{x-3}\,dx = -2\log|x-2| + 3\log|x-3|$$

Step 1		Step 2		Step 3
(分子の次数) $\geq$ (分母の次数) ならば、割り算する	$\longrightarrow$	分母が因数分解できるならば、部分分数展開	$\longrightarrow$	残りは Case 2 と同様に計算

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2+3x-5}{x^2+4x+6}\,dx$

(分子の次数) $\geq$ (分母の次数) なので、まずは割り算する (**Step1**) :

$$\begin{array}{r|rrrr} & & & x & -1 \\ \hline x^2+4x+6 & x^3 & +3x^2 & +3x & -5 \\ & x^3 & +4x^2 & +6x & \\ \hline & & -x^2 & -3x & -5 \\ & & -x^2 & -4x & -6 \\ \hline & & & x & +1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrrr} & & & & & 1 & -1 \\ \hline 1 & 4 & 6 & 1 & 3 & 3 & -5 \\ & & & 1 & 4 & 6 & \\ \hline & & & & -1 & -3 & -5 \\ & & & & -1 & -4 & -6 \\ \hline & & & & & 1 & 1 \end{array}$$

左は通常の多項式の割り算の筆算で、右は係数だけを見て筆算したもの。右はすぐ上の数字を足し引きします。普通の数の割り算の筆算とよく似ていますが、計算の仕方が違うことに注意。講義では右の記法を使います。それぞれお好みで。

$$\int \frac{x^3+3x^2+3x-5}{x^2+4x+6}\,dx$$

$$= \int (x-1)\,dx + \int \frac{x+1}{x^2+4x+6}\,dx$$
Step1

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \int \frac{x+1}{(x+2)^2+2}\,dx$$
分母の判別式:
$D/4 = 4-6 \leq 0$
分母を平方完成 †(**Step3**)

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \int \frac{u-1}{u^2+2}\,du$$
$u = x+2$
$du = dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \int \frac{u}{u^2+2}\,du - \int \frac{1}{u^2+2}\,du$$
分子の u と -1 のところで和に分解

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\log(u^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{2}}u$$
ひとつ目の積分は $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$ の形
ふたつ目の部分は次ページで詳しく ($\star$)

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\log(x^2+4x+6) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)$$
u を x に戻す

---

† 平方完成する前に $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+6}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4x+6}\,dx = \log(x^2+4x+6) - \int \frac{1}{u^2+2}\,du$ と変形して計算するほうが少し効率がよい。講義では説明しやすく、平方完成してから変形する方法を紹介している。やりやすい方を選ぼう。

$(\star)$ $\displaystyle\int \frac{1}{1+X^2}\,dX = \operatorname{Arctan} X$ の形に変える手続きは次のようにする:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{u^2+2}\,du &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u\right)^2+1}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{T^2+1}\cdot\sqrt{2}\,dT && T=\frac{1}{\sqrt{2}}u,\quad dT=\frac{1}{\sqrt{2}}\,du \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\operatorname{Arctan} T && \int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\operatorname{Arctan} x \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{2}}u && \left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{2}}u\right)'=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u\right)^2+1}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{(合成関数の微分)}
\end{aligned}$$

途中の灰色の部分は、置換積分でていねいに計算したもの。計算に慣れれば、飛ばしてもよい。このとき、$\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{2}}u$ の前の $\sqrt{2}$ を掛け忘れることがよくあるので注意しましょう。

有理式の積分 (特別な場合)

$$\int \frac{ax+b}{Ax^2+Bx+C}\,dx \quad (A\neq 0)$$

分母の判別式 $D=B^2-4AC$

$D>0$ → Case 1、$D\leq 0$ → Case 2

Case 1 ($D>0$)

$$\int \frac{ax+b}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

$\displaystyle\frac{ax+b}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}$ の形に

Case 2 ($D\leq 0$)

$$\int \frac{ax+b}{Ax^2+Bx+C}\,dx \quad (B^2-4AC\leq 0)$$

分母を平方完成して、置換積分する