小テスト第 3 回解答　2015/10/28

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{5+\cos x}\,dx$

三角関数の有理式の積分

$u=\tan\frac{x}{2}$ とおく $\rightsquigarrow$ $du=\frac{u^2+1}{2}dx$, $\sin x=\frac{2u}{1-u^2}$, $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$

$u=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと、$du=\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\times\dfrac{1}{2}dx=\dfrac{1}{2}(1+\tan^2\dfrac{x}{2})\,dx=\dfrac{1+u^2}{2}dx$ となる。また、$\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{2}{1+u^2}-1=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ となる。

$$\int\frac{1}{5+\cos x}\,dx=\int\frac{1}{5+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du=\int\frac{1}{3+2u^2}\,du=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}u\right)^2}\,du$$

$$=\frac{1}{3}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{2}{3}}u\times\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\tan\frac{x}{2}\right)$$

$T=\sqrt{\frac{2}{3}}u$ と置換積分

無理式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ を含む積分

x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0)$ の有理式の積分

e.g. $\displaystyle\int\frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-4}}\,dx,\ \int\frac{1}{(x+1)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \int\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ など

$a>0$ → **Case 1 ($a>0$)**

$a>0$ ならば、

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$

とおく

$a<0$ → **Case 2 ($a<0$)**

$a<0$ かつ $ax^2+bx+c=0$ が相異なる２つの解 α, β を持つとき、

$t=\sqrt{\dfrac{a(x-\alpha)}{x-\beta}}$

とおく

無理式 $\sqrt[n]{ax+b}$ を含む積分

x と $\sqrt[n]{ax+b}$ $(a\neq 0)$ の有理式の積分は

$t=\sqrt[n]{ax+b}$

とおく

e.g. $\displaystyle\int\frac{1}{(x-2)\sqrt{x+1}}\,dx$ など

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-4}}\,dx$

$\sqrt{x^2-4}=t-x$ とおく。両辺を 2 乗して、$x^2-4=t^2-2tx+x^2$ となるから、$x=\dfrac{t^2+4}{2t}$ を得る。これより、$dx=\dfrac{t^2-4}{2t^2}dt$ となる。また、

$$x-2=\frac{t^2+4}{2t}-2=\frac{(t-2)^2}{2t},\qquad \sqrt{x^2-4}=t-x=t-\frac{t^2+4}{2t}=\frac{t^2-4}{2t}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-4}}\,dx&=\int\frac{2t}{(t-2)^2}\cdot\frac{2t}{t^2-4}\cdot\frac{t^2-4}{2t^2}\,dt\\&=\int\frac{2}{(t-2)^2}\,dt\\&=-\frac{2}{t-2}\\&=-\frac{2}{x-2+\sqrt{x^2-4}}\end{aligned}$$

$t=x+\sqrt{x^2-4}$

また、$t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$ と変数変換しても計算できるが、符号に注意する必要がある:

$t = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$ とおくと、$x = \dfrac{2(t^2+1)}{t^2-1}$, $dx = \dfrac{-8t}{(t^2-1)^2}\,dt$ となる。被積分関数が $\dfrac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-4}}$ なので、$x < -2,\ 2 < x$ が要請される。したがって、

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \cdot |x-2| = t \cdot \left| \frac{2(t^2+1)}{t^2-1} - 2 \right| = \frac{4t}{|t^2-1|} \qquad \left(\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|\right)$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-4}}\,dx &= \int \frac{t^2-1}{4} \cdot \frac{|t^2-1|}{4t} \cdot \frac{-8t}{(t^2-1)^2}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{|t^2-1|}{t^2-1}\,dt \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{|t^2-1|}{t^2-1} \cdot t \qquad \frac{|X|}{X} = \begin{cases} 1 & (X > 0) \\ -1 & (X < 0) \end{cases} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} \qquad t = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}},\ t^2 - 1 = \frac{4}{x-2}
\end{aligned}$$

途中で符号 (絶対値記号) を考える必要が出てくるので、$a > 0$ の場合は、$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ とおく方法をおすすめします。

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+9}}\,dx$ $\quad$ ($\longleftarrow$ $-x^2+9 > 0$ が暗に仮定されていることに注意)

$t = \sqrt{\dfrac{-(x-3)}{x+3}}$ とおく (もちろん、$t = \sqrt{\dfrac{-(x+3)}{x-3}}$ でもよい)。これを 2 乗して、$t^2 = \dfrac{-x+3}{x+3}$ となるから、x について解いて、$x = \dfrac{3(1-t^2)}{1+t^2}$ を得る。これから、

$$dx = 3 \cdot \frac{-2t \cdot (1+t^2) - (1-t^2) \cdot 2t}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{-12t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$\sqrt{-x^2+9} = \sqrt{\frac{-x+3}{x+3}} \cdot (x+3) = t \cdot \left(\frac{3(1-t^2)}{1+t^2} + 3 \right) = \frac{6t}{1+t^2}$$

$-x^2+9 > 0$ が要請されるので、$x+3 > 0$ であり、$\sqrt{(x+3)^2} = x+3$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+9}}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{6t} \cdot \frac{-12t}{(1+t^2)^2}\,dt \qquad u = \sqrt{\frac{-x+3}{x+3}},\ dx = \frac{-12t}{(1+t^2)^2}\,dt \\
&= -2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= -2\,\mathrm{Arctan}\,t \\
&= -2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{-x+3}{x+3}} \qquad t = \sqrt{\frac{-x+3}{x+3}}
\end{aligned}$$

また、$t = \sqrt{\dfrac{x+3}{-x+3}}$ とおいて計算すると、答えは $2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{x+3}{-x+3}}$ となる。

特に、$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ $(a < 0)$ の形は Arcsin の形に書いたほうが簡明:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+9}}\,dx = \int \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{3}x \times 3 = \mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{3}x$$