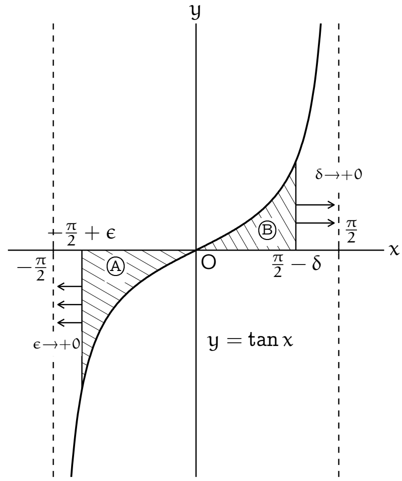
小テスト第 4 回解答　2015/11/04

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$

$u = \cos x$ とおくと、$\displaystyle\int \tan x \, dx = \int -\frac{1}{u} \, du = -\log|\log x|$ となる。
また、$\tan x$ は点 $x = \pm\frac{\pi}{2}$ で定義されていないから、広義積分の定義より



$$(\dagger) \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{0} \tan x \, dx + \lim_{\delta \to +0} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\delta} \tan x \, dx$$

であるが、**2 つの広義積分**

$$Ⓐ = \lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{0} \tan x \, dx, \quad Ⓑ = \lim_{\delta \to +0} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\delta} \tan x \, dx$$

がそれぞれ (独立に) 収束するとき、広義積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$ **は収束する**といい、(†) により積分の値を決めることに注意。そうでなければ、**広義積分** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$ **は発散する**という。上の 2 つの広義積分Ⓐ、Ⓑが収束するとき、式 (†) が意味を持つと思ったほうがいい。

今、$\displaystyle\lim_{\epsilon \to +0} \int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{0} \tan x \, dx = \lim_{\epsilon \to +0} \Big[-\log|\cos x|\Big]_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{0} = -\infty$ となるから、**広義積分** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$ **は発散する**。
よくある間違いですが、

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx &= \lim_{\epsilon \to +0} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{0} \tan x \, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \tan x \, dx \right) \\
&= \lim_{\epsilon \to +0} \left(\Big[-\log|\cos x|\Big]_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{0} + \Big[-\log|\cos x|\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \right) = 0
\end{aligned}$$

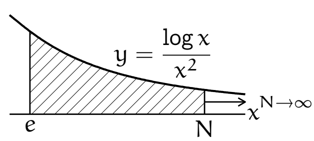
としてはいけない。上でも述べた通り、2 つの広義積分がそれぞれ独立に収束することを見ないといけない。一般に、上のように ϵ で同時に $\pm\frac{\pi}{2}$ に近づける理由はない。他には、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx \neq \lim_{\epsilon \to +0} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{0} \tan x \, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}-2\epsilon} \tan x \, dx \right) = -\log 2$$

となる。確かめてみよう。

(2) $\displaystyle\int_{e}^{\infty} \frac{\log x}{x^2} \, dx$

部分積分法より、



$$\int \frac{\log x}{x^2} \, dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \log x \, dx = -\frac{1}{x} \log x - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \, dx = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
\int_{e}^{\infty} \frac{\log x}{x^2} \, dx &= \lim_{N \to \infty} \int_{e}^{N} \frac{\log x}{x^2} \, dx = \lim_{N \to \infty} \left[-\frac{\log x}{x}\right]_{e}^{N} + \lim_{N \to \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{e}^{N} \\
&= \lim_{N \to \infty} \left(-\frac{\log N}{N} + \frac{1}{e}\right) + \lim_{N \to \infty} \left(-\frac{1}{N} + \frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

ここで、$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{\log N}{N}$ の部分は l'Hôpital の定理を使う:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\log N}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{\frac{1}{N}}{1}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}=0$$

l'Hôpital の定理

f, g : 微分可能な関数

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ または $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ で、

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するとき、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ。

(3)　(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}\,dx$

$\sqrt{x^2+x-2}=t-x$ とおくと、

$$\begin{aligned}x^2+x-2&=t^2-2tx+x^2\\ x&=\frac{t^2+2}{2t+1}\\ dx&=\frac{2(t^2+t-2)}{(2t+1)^2}\,dt\end{aligned}\qquad\qquad\begin{aligned}\sqrt{x^2+x-2}&=t-x\\ &=\frac{t^2+t-2}{2t+1}\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}\,dx&=\int\frac{2t+1}{t^2+t-2}\cdot\frac{2(t^2+t-2)}{(2t+1)^2}\,dt\\ &=2\int\frac{1}{2t+1}\,dt=2\log|2t+1|\times\frac{1}{2}=\log\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x-2}\,\right|\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}$ は $x=-2,1$ で定義されていないから、

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}\,dx&=\lim_{\epsilon\to+0}\int_{1+\epsilon}^2\frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}}\,dx\\ &=\lim_{t\to1+0}\left[\log\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x-2}\,\right|\right]_t^2\\ &=\lim_{t\to1+0}\left(\log 9-\log\left|2t+1+2\sqrt{t^2+t-2}\,\right|\right)\\ &=\log 3\end{aligned}$$