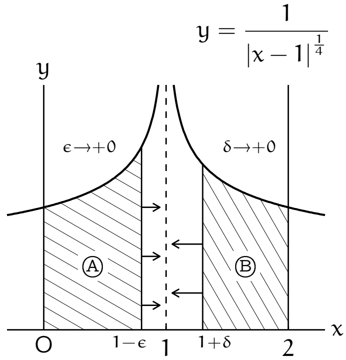
小テスト第 5 回解答　2015/11/11

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{|x-1|^{\frac{1}{4}}}\,dx$

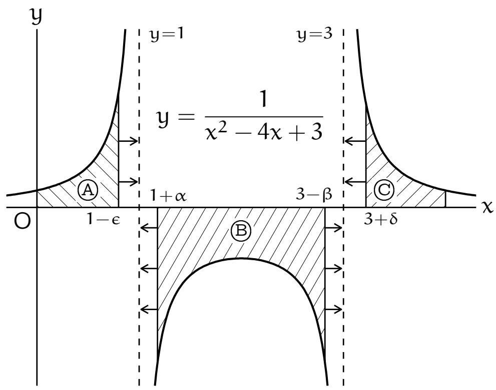
$x=1$ で $\dfrac{1}{|x-1|^{\frac{1}{4}}}$ は定義されていない (連続ではない) から、定義より、



$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{|x-1|^{\frac{1}{4}}}\,dx &= \lim_{\epsilon\to+0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{1}{|x-1|^{\frac{1}{4}}}\,dx + \lim_{\delta\to+0}\int_{1+\delta}^{2}\frac{1}{|x-1|^{\frac{1}{4}}}\,dx\\ &= \lim_{\epsilon\to+0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{4}}}\,dx + \lim_{\delta\to+0}\int_{1+\delta}^{2}\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}\,dx\\ &= \lim_{\epsilon\to+0}\left[-\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{4}}\right]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\delta\to+0}\left[\frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{4}}\right]_{1+\delta}^{2}\\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

また、$x^{\frac{1}{4}}=-(-x)^{\frac{1}{4}}$ $(x>0)$ とできないことにも注意。$\sqrt[4]{-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ は虚数です。

(2) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$



$\dfrac{1}{x^2-4x+3}=\dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ は、$x=1,3$ で定義されていない (連続ではない) から、広義積分となる。定義より、

$$\int_0^4 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$$

定義 (この式) の意味は、３つの広義積分

$$\begin{aligned}Ⓐ &= \int_0^1 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{1}{x^2-4x+3}\,dx\\ Ⓑ &= \int_1^3 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_{1+\alpha}^{2}\frac{1}{x^2-4x+3}\,dx + \lim_{\beta\to+0}\int_2^{3-\beta}\frac{1}{x^2-4x+3}\,dx\\ Ⓒ &= \int_3^4 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx = \lim_{\delta\to+0}\int_{3+\delta}^{4}\frac{1}{x^2-4x+3}\,dx\end{aligned}$$

がそれぞれ収束するとき、$\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx = Ⓐ + Ⓑ + Ⓒ$ により広義積分の値を決め、一方、Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ のどれかひとつでも発散していたら、$\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$ は発散する (と決めた) ということ。**(1) のように、収束する場合は問題ないのですが、今回のように発散する場合は気をつけなければなりません。**

さて、原始関数 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$ の計算は、部分分数分解すればよい:

$$\int \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx = -\frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x-3|$$

したがって、Ⓐは (Ⓑ、Ⓒも) 発散するから、$\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$ は発散する。

(3) $x \geq 1$ のとき、$x^3 \geq x^2$ だから、$\displaystyle\left|\frac{\cos x}{1+x^3}\right| \leq \frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad (\because\ -1 \leq \cos x \leq 1)$ となることがわかる [**条件 (i)**]。また、

$$(\natural) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^3}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{\cos x}{1+x^3}\,dx = \int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^3}\,dx + \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{\cos x}{1+x^3}\,dx$$

と書ける。$[0,1]$ 上、$\displaystyle\frac{\cos x}{1+x^3}$ は連続な関数だから、$\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x^3}\,dx$ は (広義積分ではなく) 定積分である。したがって、$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{\cos x}{1+x^3}\,dx$ が収束することを見ればよい。

$$\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{N\to\infty}\bigl(\mathrm{Arctan}\,N - \mathrm{Arctan}\,1\bigr) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\ (\text{収束}) \qquad \textbf{条件 (ii)}$$

条件 (i)、**条件 (ii)** より、広義積分の収束に関する定理が使えて、$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{\cos x}{1+x^3}\,dx$ が収束することが示せた。

他には、$\displaystyle\left|\frac{\cos x}{1+x^3}\right| \leq \frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{x^3}$ と評価する方法もある。ただし、$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$ が発散するので、$(\natural)$ のように積分を分けることが必要になる。他には、$\displaystyle\left|\frac{\cos x}{1+x^3}\right| \leq \frac{1}{1+x^3}$ や $\displaystyle\left|\frac{\cos x}{1+x^3}\right| \leq \frac{1+x}{1+x^3} = \frac{1}{x^2-x+1}$ など。やや計算は大変だが、部分分数展開を経て

$$\int \frac{1}{1+x^3}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}\,dx = \frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)$$

となる。