小テスト第 6 回解答　2015/12/02

1. 重積分 $I = \iint_K \sin(2x+y)\,dxdy$ $\left(K = \left\{(x,y) \mid 0 \le x,\ y \le \frac{\pi}{2}\right\}\right)$ を累次積分によって計算する:

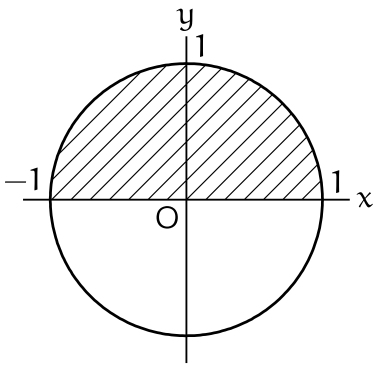
(a) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+y)\,dx \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}\cos(2x+y) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\cos(y+\pi) + \frac{1}{2}\cos y \right) dy = \left[\sin y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \qquad \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$$

(b) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+y)\,dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos(2x+y) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

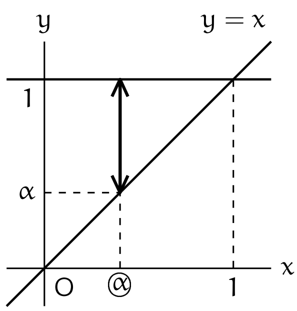
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos 2x \right) dy = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \qquad \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$$

2. (1) $D = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\right\}$



まずは境界 $x^2+y^2=1$, $y=0$ を描いてから、該当する領域を見定めよう。

(2) $D = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\right\}$



まずは、$0 \le x \le 1$ であることを意識して、境界 $y=x$, $y=1$ を描く。ここで、次の考え方が累次積分を計算するときに大事になる:

x の値を $x=\alpha$ $(0 \le \alpha \le 1)$ と決めるごとに、y は $\alpha \le y \le 1$ を満たさなければならない ($\alpha \le y \le 1$ **の間を動く**)、と考えて領域 D を図示しよう。