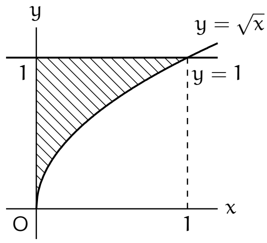
## 小テスト第 7 回解答　2015/12/09

1. (1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{y}\,dxdy$,　　D は $y=\sqrt{x}$, $y=1$, $y$ 軸によって囲まれる領域




<u>ポイント: D を図示して、縦線形の形に</u>

というわけで、まずは D を図示する (左図)
この場合、縦線形の書き方は 2 通り考えられる。

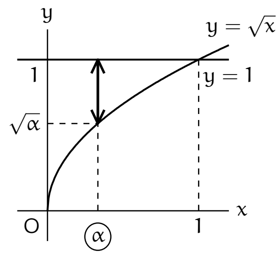



図 1

$(x,y)\in D$ とする。このとき、$x$ の取りうる範囲は $0\leq x\leq 1$ となる。$x$ の値を $x=\alpha$ $(0\leq\alpha\leq 1)$ とすると、図 1 より、$\sqrt{\alpha}\leq y\leq 1$ となる。よって、

$$D=\left\{\,(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ \sqrt{x}\leq y\leq 1\,\right\}$$

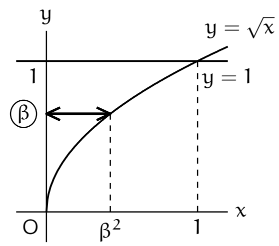



図 2

$(x,y)\in D$ とする。このとき、$y$ の取りうる範囲は $0\leq y\leq 1$ となる。$y$ の値を $y=\beta$ $(0\leq\beta\leq 1)$ とすると、図 2 より、$0\leq x\leq\beta^2$ となる。よって、

$$D=\left\{\,(x,y)\mid 0\leq y\leq 1,\ 0\leq x\leq y^2\,\right\}$$

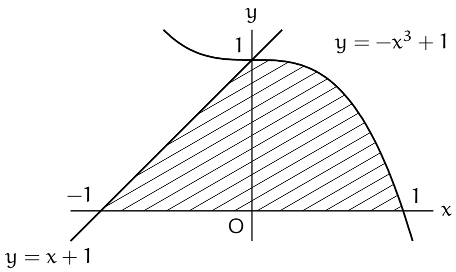
どちらの縦線形の表示により計算してもよい (積分の値は同じになる)。
1 の場合:

$$\iint_D \sqrt{y}\,dxdy=\int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1\sqrt{y}\,dy\right)dx=\int_0^1\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{\sqrt{x}}^1dx$$
$$=\int_0^1\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}\right]_0^1=\frac{2}{7}$$

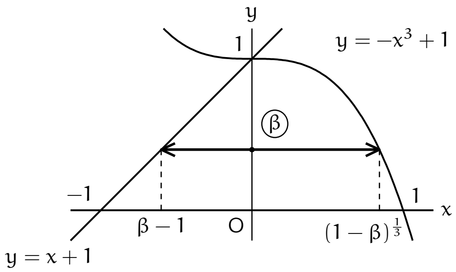
2 の場合:

$$\iint_D \sqrt{y}\,dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{y^2}\sqrt{y}\,dx\right)dy=\int_0^1\left[x\sqrt{y}\right]_0^{y^2}dy$$
$$=\int_0^1 y^{\frac{5}{2}}\,dy=\left[\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{7}$$

(2) $\displaystyle\iint_D x(y-1)\,dxdy$,　　D は $y=-x^3+1$, $y=x+1$, $x$ 軸によって囲まれる領域




まずは D を図示する (左図)
この場合、$y$ について D を縦線形の形に書くのが簡明です。$x$ について縦線形の形に書こうとすると、領域を 2 つに分けなければなりません (後述しますが、この考え方も大事です)。

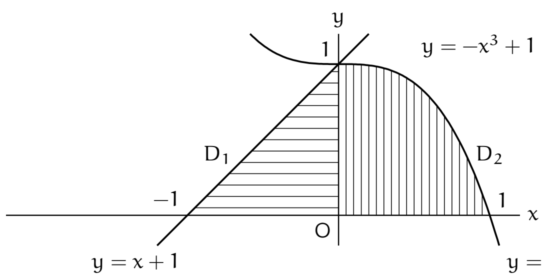


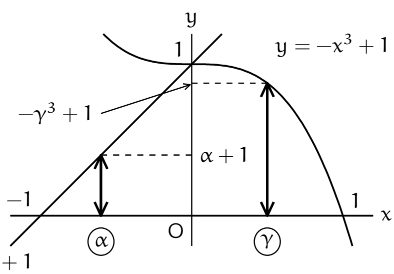

$(x,y)\in D$ とする。このとき、$y$ の取りうる値は $0\leq y\leq 1$ となる。$y$ の値を $y=\beta$ $(0\leq\beta\leq 1)$ とすると、左図より、$\beta-1\leq x\leq(1-\beta)^{\frac{1}{3}}$ となる。よって、

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\leq y\leq 1,\ y-1\leq x\leq(1-y)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

$$\begin{aligned}\iint_D x(y-1)\,dxdy &= \int_0^1\left(\int_{y-1}^{(1-y)^{\frac{1}{3}}} x(y-1)\,dx\right)dy = \int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2(y-1)\right]_{y-1}^{(1-y)^{\frac{1}{3}}}dy \\ &= \int_0^1\left(-\frac{1}{2}(1-y)^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}(y-1)^3\right)dy \\ &= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}(1-y)^{\frac{8}{3}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(y-1)^4\right]_0^1 = -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

$x$ について D を縦線形に書こうと思うと、D を 2 つの領域に分けなければならない (左図):




すなわち、左図のように D を $D_1$, $D_2$ に分けると、次のように縦線形の形に書ける:

$$D=D_1\cup D_2,\qquad \begin{aligned}D_1&=\left\{(x,y)\mid -1\leq x\leq 0,\ 0\leq y\leq x+1\right\}\\ D_2&=\left\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq -x^3+1\right\}\end{aligned}$$

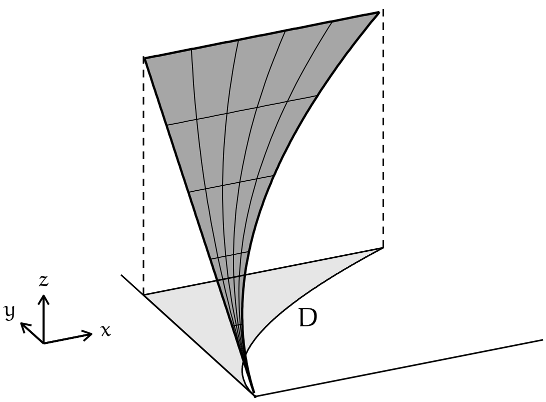
また、$D_1\cap D_2=\left\{(0,y)\mid 0\leq y\leq 1\right\}$ は面積 0 だから、D 上の重積分は

$$\iint_D x(y-1)\,dxdy=\iint_{D_1}x(y-1)\,dxdy+\iint_{D_2}x(y-1)\,dxdy$$

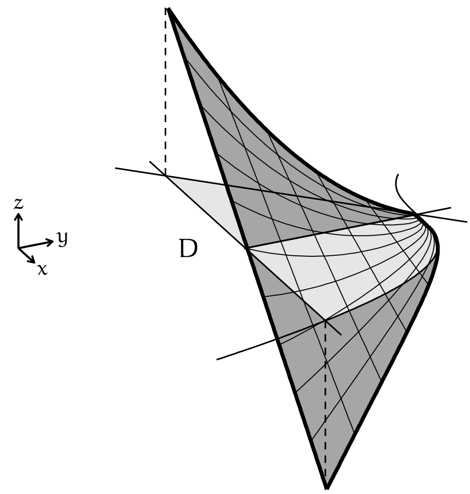
のように、$D_1$ 上の重積分と $D_2$ 上の重積分に分けられる。したがって、

$$
\begin{aligned}
\iint_D x(y-1)\,dxdy &= \iint_{D_1} x(y-1)\,dxdy + \iint_{D_2} x(y-1)\,dxdy \\
&= \int_{-1}^{0}\left(\int_0^{x+1} x(y-1)\,dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_0^{-x^3+1} x(y-1)\,dy\right)dx \\
&= \int_{-1}^{0}\left[\frac{1}{2}x(y-1)^2\right]_0^{x+1}dx + \int_0^1\left[\frac{1}{2}x(y-1)^2\right]_0^{-x^3+1}dx \\
&= \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x\right)dx + \int_0^1\left(\frac{1}{2}x^7-\frac{1}{2}x\right)dx \\
&= \left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{16}x^8-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

参考図: (1) と (2) のグラフを立体的に見ると次のようになります:




D 上の $z=\sqrt{y}$ のグラフ




D 上の $z=x(y-1)$ のグラフ