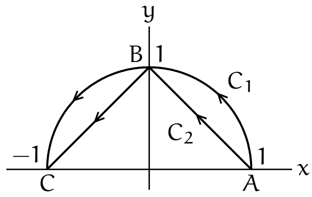
小テスト第 9 回解答　2016/01/06

1. (1) $C_1 : x = \cos t,\ y = \sin t$, 向き $t : 0 \to \pi$



C_1 上、$dx = -\sin t\,dt,\ dy = \cos t\,dt$ となるから、

$$\begin{aligned}\int_{C_1} y\,dx + x\,dy &= \int_0^{\pi} \sin t \cdot (-\sin t)\,dt + \cos t \cdot \cos t\,dt \\ &= \int_0^{\pi} \cos 2t\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

(2) C_2 : 3 点 $A = (1, 0),\ B = (0, 1),\ C = (-1, 0)$ を順番に通る折れ線 ABC
例えば、折れ線 ABC は次のようにパラメータ付けできる:

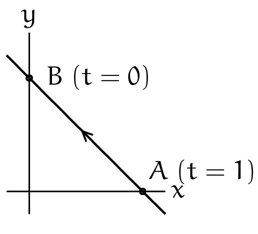
$$AB : x = t,\ y = 1 - t, \quad 向き\ t : 1 \to 0$$

$$BC : x = t,\ y = t + 1, \quad 向き\ t : 0 \to -1$$

AB 上 $dx = dt,\ dy = -dt$、BC 上 $dx = dt,\ dy = dt$ となるから、

$$\begin{aligned}\int_{C_2} y\,dx + x\,dy &= \int_{AB} y\,dx + x\,dy + \int_{BC} y\,dx + x\,dy \\ &= \int_1^0 (1-t)\,dt + t \cdot (-dt) + \int_0^{-1} (t+1)\,dt + t\,dt \\ &= \int_1^0 (1-2t)\,dt + \int_0^{-1} (2t+1)\,dt \\ &= \left[t - t^2\right]_1^0 + \left[t^2 + t\right]_0^{-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

【折れ線のパラメータの付け方】



たとえば、(2) で、直線 AB は $y = -x + 1$ と表せられるから、$x = t$ とすると、$y = -t + 1$ となる。このとき、

$$t = 0\ のとき、\ x = 0,\ y = 1\ (点\ B)$$

$$t = 1\ のとき、\ x = 1,\ y = 0\ (点\ A)$$

となるから、

$$AB : x = t,\ y = -t + 1, \quad 向き\ t : 1 \to 0$$

と書ける。同様に、直線 BC は $y = x + 1$ と表せられるから、$x = t$ とすると、$y = t + 1$。向き (と t の範囲) に注意して、

$$BC : x = t,\ y = t + 1, \quad 向き\ t : 0 \to -1$$

と書ける。

ただし、直線 $x = a$ のような場合は、$x = a,\ y = t$ とすればよい。
また、直線 $y = b$ の場合は、$x = t,\ y = b$ とすればよい。