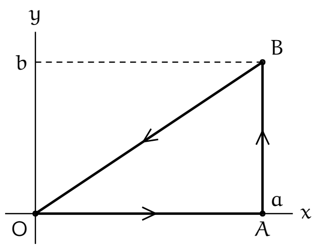
小テスト第 10 回解答　2016/01/13

1. 

例えば、折れ線 OABO は次のようにパラメータ付けできる:

$$\mathrm{OA}: x = t,\ y = 0, \quad \text{向き } t: 0 \to a$$

$$\mathrm{AB}: x = a,\ y = t, \quad \text{向き } t: 0 \to b$$

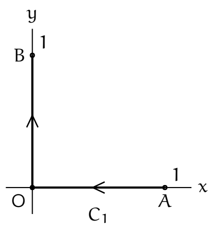
$$\mathrm{BO}: x = t,\ y = \frac{b}{a}t, \quad \text{向き } t: a \to 0$$

OA 上 $dx = dt,\ dy = 0$、AB 上 $dx = 0,\ dy = dt$、BO 上、$dx = dt,\ dy = \frac{b}{a}dt$ となるから、

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{OABO}} x\,dy &= \int_{\mathrm{OA}} x\,dy + \int_{\mathrm{AB}} x\,dy + \int_{\mathrm{BO}} x\,dy \\ &= 0 + \int_0^b a\,dt + \int_a^0 t\cdot\frac{b}{a}\,dt \\ &= ab + \left[\frac{b}{2a}t^2\right]_a^0 \\ &= \frac{1}{2}ab\end{aligned}$$

【別解】折れ線 OABO の囲む領域 D ($\triangle$OAB) の境界 ∂D の向き (Green の定理での付け方) と折れ線 OABO の向きは一致するので、Green の定理より、

$$\int_{\mathrm{OABO}} x\,dy = \int_{\partial D} x\,dy = \iint_{\triangle \mathrm{OAB}} dxdy = (\triangle\mathrm{OAB}\ \text{の面積}) = \frac{1}{2}ab$$

2. (1) 

例えば、折れ線 AOB は次のようにパラメータ付けできる:

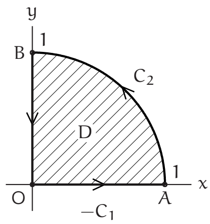
$$\mathrm{AO}: x = t,\ y = 0, \quad \text{向き } t: 1 \to 0$$

$$\mathrm{OB}: x = 0,\ y = t, \quad \text{向き } t: 0 \to 1$$

AO 上 $dx = dt,\ dy = 0$、OB 上 $dx = 0,\ dy = dt$ となるから、

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{AOB}} y\sin xy\,dx + x\sin xy\,dy &= \int_{\mathrm{AO}} y\sin xy\,dx + x\sin xy\,dy + \int_{\mathrm{OB}} y\sin xy\,dx + x\sin xy\,dy \\ &= 0 \qquad (\text{折れ線 AOB 上 } x = 0 \text{ または } y = 0 \text{ なので、} \sin xy = 0)\end{aligned}$$

(2)



$C_2 - C_1$ が閉曲線[†] であるから、Green の定理を適用することができる。$P = y\sin xy,\ Q = x\sin xy$ とおくと、$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ となるから、$C_2 - C_1$ の囲む領域を D とすると、

$$\int_{C_2 - C_1} y\sin xy\,dx + x\sin xy\,dy = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx dy = 0$$

よって、$\displaystyle\int_{C_2} y\sin xy\,dx + x\sin xy\,dy = \int_{C_1} y\sin xy\,dx + x\sin xy\,dy = 0$

C_2 上の線積分を直接計算することもできる:

$$\begin{aligned}
&\int_{C_2} y\sin xy\,dx + x\sin xy\,dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sin(\cos t\sin t)\cdot(-\sin t\,dt) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin(\cos t\sin t)\cdot\cos t\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\sin\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right) dt \\
&= \int_0^0 \sin T\,dT \qquad\qquad T = \frac{1}{2}\sin 2t,\quad dT = \cos 2t\,dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

[†] $-C_1$ は C_1 と逆向きの曲線で、$C_2 - C_1 = C_2 + (-C_1)$ は 2 つの曲線 $C_2,\ -C_1$ をつないだもの