レポート課題　2015/10/28

注意事項：

- レポートの回収は2週間後の11/11の講義にて行う。
- レポートはA4の用紙とし、レポートの上部に学生番号と名前を書き、左上をホチキスで止めること。
- 計算結果だけでなく、計算過程も書くように。

---

1. 次を計算せよ。(各4点)

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+6x+11}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-2}}\,dx$　(5) $\displaystyle\int e^{x-e^x}\,dx$　(6) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2+2x-3}\,dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}\,dx$　(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$　(9) $\displaystyle\int \frac{1}{3+2\sin x}\,dx$

2. **【人口問題における数理モデル】**

$N=N(t)$ を時刻 t におけるある地域の人口とする。ある時刻 t_0 と、t_0 より少しだけ経った時刻 $t_0+\epsilon$ ($\epsilon>0$ はとても小さな数) との間に、人口は $N(t_0+\epsilon)-N(t_0)$ だけ変化する。すなわち、時刻 t_0 から $t_0+\epsilon$ までの間の人口の平均変化率は $\frac{N(t_0+\epsilon)-N(t_0)}{(t_0+\epsilon)-t_0}$ となる。したがって、変数 t の関数 $N(t)$ の $t=t_0$ における微分 $\frac{dN}{dt}(t_0)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{N(t_0+\epsilon)-N(t_0)}{(t_0+\epsilon)-t_0}$ は、時刻 t_0 における "瞬間の" 人口の変化率 (変化の速さ) と考えることができる。

フェルフルスト (Pierre-François Verhulst、1804年〜1849年) は人口増加の仕方を説明する数理モデル* として次の方程式 (微分を含むこのような方程式を**微分方程式**という) を提案した：

$$(\dagger)\qquad \frac{dN}{dt}=\gamma N\left(1-\frac{N}{\mu}\right)\qquad (\gamma,\ \mu\text{は正の定数})$$

すなわち、方程式 (†) を満たす関数 $N(t)$ が実際の人口の変化をよく表していると発表した。

(1) さて、方程式 (†) を形式的に $\dfrac{\mu}{N(\mu-N)}dN=\gamma dt$ と変形し、両辺をそれぞれ変数 $N,\ t$ について積分して、

$$(\dagger\dagger)\qquad \log\left(\frac{N}{\mu-N}\right)=\gamma t+C\qquad (C\text{は積分定数})$$

となることを示せ。ただし、ここで $N,\ \mu-N>0$ と仮定している。(2点)

(2) 時刻 $t=0$ のときの N の値を $N_0=N(0)>0$ とするとき、積分定数 C を $N_0,\ \gamma,\ \mu$ を用いて表わせ。また、式 (††) を変形して

$$N=\frac{\mu}{1+e^{-(\gamma t+C)}}$$

となることを示し、方程式 (†) を満たしていることを確かめよ。(2点)

*数理モデルとは時間により変化する自然現象などを数式で記述し、その現象の振る舞いを模倣 (近似) した "模型" のことをいう。モデルを作ることによって、その現象の本質を理解し、未来予測の目安を得ることができる。微分積分学の (ひいては数学の) ひとつの応用である。微分方程式 (†) については、シャーレの中に入れられた細菌の増殖の仕方にもこのモデルを当てはめることができる。この方程式は生物の個体数の変動に関する基本的なモデルである。

(3) この数理モデルによると、人口はどのように推移するのであろうか？ $N = N(t)\ (0 \leq t)$ のグラフの概形を描け。ただし、$\lim_{t\to\infty} N(t)$ に注意せよ。(2 点)

3. 次の関数 $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ について以下の問いに答えよ。(各 3 点)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos x & \left(\dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi\right) \end{cases}$$

(1) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2) $f(x)$ の不定積分 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\ (0 \leq x \leq \pi)$ を求め、関数 $F(x)$ のグラフの概形を描け。ただし、$F'(\frac{\pi}{2})$ に注意せよ。

(3) $F(x)$ の不定積分 $G(x) = \displaystyle\int_0^x F(t)\,dt\ (0 \leq x \leq \pi)$ を求め、関数 $G(x)$ のグラフの概形を描け。ただし、$G'(\frac{\pi}{2})$ に注意せよ。

4. 次を計算せよ。(各 6 点)

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x + 3\cos x}{1 + 2\sin x + \cos x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+4)\sqrt{4-x^2}}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{2+x}}\,dx$

5. 次を計算せよ。(各 5 点)

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx$

6. (1) 自然数 m, n に対して、次が成り立つことを示せ。(8 点)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\ \sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\ \cos nx\,dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\ \cos nx\,dx = 0$$

(2) $a_0, a_k, b_k\ (1 \leq k \leq n)$ を実数とする。$f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ と書かれた関数 $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ を考える。このとき、次が成り立つことを示せ。(4 点)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (1 \leq k \leq n)$$

(3) $f(x) = x^3$ とする。このとき、任意の自然数 n に対して、次の定積分 a_0, a_n, b_n を求めよ。(4 点)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$