

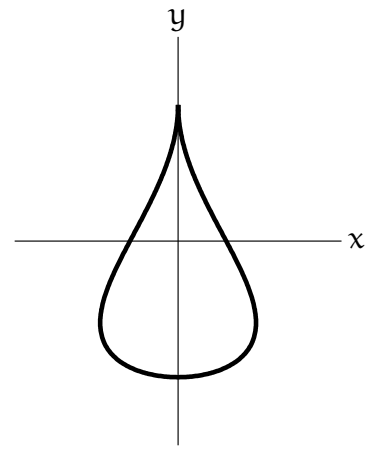
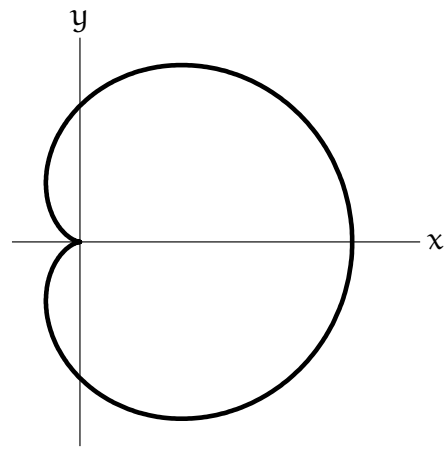
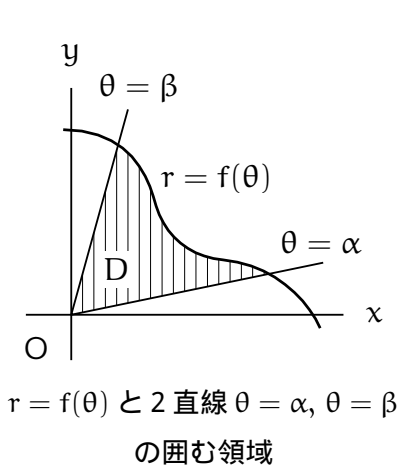
注意事項：

- レポートの回収は1/6の講義にて行う。
- レポートはA4の用紙とし、レポートの上部に学生番号と名前を書き、左上をホチキスで止めること。
- 計算結果だけでなく、計算過程も書くように。

1. 次で与えられる領域  $D$  上の重積分について、 $D$  を必ず図示し、積分の値を求めよ。(各10点)

- (1)  $\iint_D y \, dx dy$ ,  $D$  は  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $y = -x + 2$ ,  $x$  軸で囲まれる領域
- (2)  $\iint_D e^{-x+3y} \sin(x-y) \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq -x + 3y \leq 3, 0 \leq x - y \leq \pi\}$ .
- (3)  $\iint_D \sqrt{xy} \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq x \leq y\}$ .
- (4)  $\iint_D y \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \mid y \geq 2x - 3, (x - 2)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ .
- (5)  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

- (1) 極座標表示により  $r = f(\theta)$  ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ) で定義される曲線  $C$  を考える。この曲線  $C$  と2直線  $\theta = \alpha$ ,  $\theta = \beta$  ( $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 2\pi$ ) で囲まれる領域  $D$  の面積  $S = \iint_D dx dy$  は  $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$  で与えられることを示せ。(8点)
- (2) (a)  $r = 1 + \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) により定義される曲線をカーディオイド (cardioid, 心臓形) という。カーディオイドの囲む領域の面積を求めよ。(7点)
- (b)  $x = \frac{1}{2} \sin \theta \sin^3 \frac{\theta}{2}$ ,  $y = \cos \theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) により定義される曲線を teardrop curve という。 $r^2 = x^2 + y^2$  を  $\theta$  の式で表わすことにより、teardrop curve で囲まれる領域の面積を求めよ。(7点)



3. 次で与えられる曲線  $C$  に対し、線積分  $\int_C y e^{xy} dx + x e^{xy} dy$  の値を求めよ。(各6点)

- (1)  $C_1$ : 3点  $O = (0, 0)$ ,  $A = (-1, 1)$ ,  $B = (1, 1)$  を順番に通る折れ線  $OAB$
- (2)  $C_2$ : 3点  $O = (0, 0)$ ,  $E = (1, 0)$ ,  $B = (1, 1)$  を順番に通る折れ線  $OEB$
- (3)  $C_3$ :  $x = t$ ,  $y = t^n$ , 向き  $t: 0 \rightarrow 1$  ( $n$  は自然数)

4. (1)  $a, b > 0, (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  とするとき、次の重積分を計算せよ。(6点)

$$\iint_K \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \, dx dy, \quad K = \{(x, y) \mid x_0 \leq x \leq x_0 + a, y_0 \leq y \leq y_0 + b\}.$$

- (2) 今、少なくとも1辺の長さが整数となっている、様々な大きさの長方形のタイルが用意されている。これらを重ならないように並べて、右図のように大きな長方形を作るとき、この長方形の少なくとも1辺の長さもまた整数となることを示せ。(4点、ヒント: 少なくとも1辺の長さが整数となっている長方形  $K$  上では、(1) の重積分の値はどうか?)

