レポート課題 2 略解　2015/01/13

総評：

全体的によくできていました。平均点は 82.6 点、最高点は 100 点です。アドバイスとしては

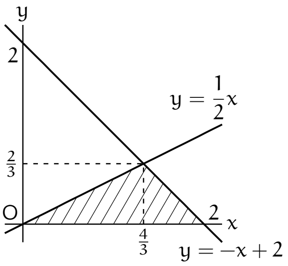
- ▷ 重積分の問題はよく出来ていたと思います。縦線形上の重積分の解き方を思い出しましょう。期末試験では、重積分の計算がメインとなります。あまりわからなかった人も、よく出来た人も、小テスト第 6〜8 回を見直すとよいでしょう。
- ▷ 線積分はパラメータ t の向きによく注意してください。苦手な人は小テスト第 9 回を見直すと思います。解答には折れ線のパラメータの付け方も詳しく解説しています。
- ▷ このレポート問題では Green の定理まで含めてませんが、線積分の次のステップとして、小テスト第 10 回と演習問題に取り組んでください。

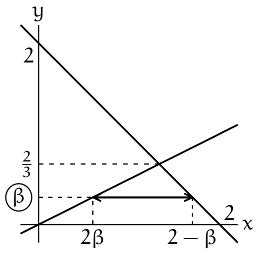
得点表

1.	2.		3.	4.	
10 (×5)	8	7 (×2)	6 (×3)	6	4
50	22		18	10	

---

1. (1) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$,　D は $y=\frac{1}{2}x$, $y=-x+2$, x 軸で囲まれる領域





まずは、D を図示する (左図)。左図より、右図のように縦線形に書いてみる。すなわち、$(x,y)\in D$ とすると、y の動く範囲 (取りうる範囲) は $0\le y\le\frac{2}{3}$ となる。$y=\beta$ $(0\le\beta\le\frac{2}{3})$ のとき、x の動く範囲は $2\beta\le x\le 2-\beta$ となるから、

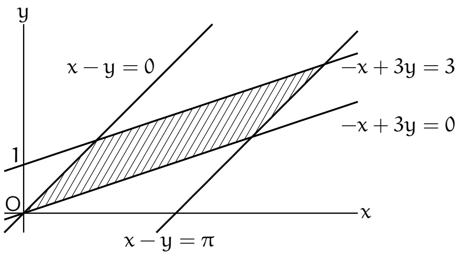
$$D=\left\{(x,y)\mid 0\le y\le\tfrac{2}{3},\ 2y\le x\le 2-y\right\}$$

となる。

したがって、

$$\iint_D y\,dxdy=\int_0^{\frac{2}{3}}\left(\int_{2y}^{2-y}y\,dx\right)dy=\int_0^{\frac{2}{3}}y(2-3y)\,dy=\frac{4}{27}$$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{-x+3y}\sin(x-y)\,dxdy$,　$D=\left\{(x,y)\mid 0\le -x+3y\le 3,\ 0\le x-y\le\pi\right\}$.



まずは、D を図示する。縦線形として計算するより、変数変換したほうがよい。

$u=-x+3y$, $v=x-y$ とおくと、$x=\frac{u+3v}{2}$, $y=\frac{u+v}{2}$ となり、

$$\det J=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

となる。D を u, v で置き換えて

$$E=\left\{(u,v)\mid 0\le u\le 3,\ 0\le v\le\pi\right\}$$

とおく。これより、

$$\iint_D e^{-x+3y}\sin(x-y)\,dxdy=\iint_E e^u\sin v\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|dudv=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\int_0^{\pi}e^u\sin v\,dv\right)du=e^3-1$$

ただし、$\displaystyle\iint_E e^u\sin v\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|dudv=\frac{1}{2}\int_0^3 e^u\,du\cdot\int_0^{\pi}\sin v\,dv$ と計算したほうが効率がよい ‡。

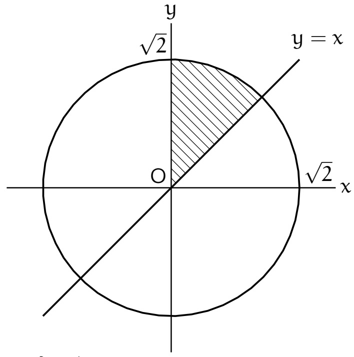
(3) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}y\,dxdy$,　$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2,\ 0\le x\le y\right\}$.

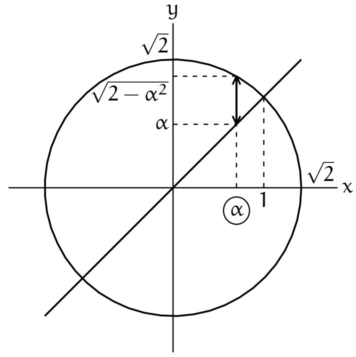
---

‡一般に、長方形領域 $K=\left\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\right\}$ 上、$f(x)g(y)$ の形の関数を積分する場合、

$$\begin{aligned}\iint_K f(x)g(y)\,dxdy&=\int_c^d\left(\int_a^b f(x)g(y)\,dx\right)dy=\int_c^d\left(g(y)\int_a^b f(x)\,dx\right)dy\\&=\int_c^d g(y)\cdot M\,dy=M\int_c^d g(y)\,dy=\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_c^d g(y)\,dy\end{aligned}\qquad M=\int_a^b f(x)\,dx\ (\leftarrow \text{定数})$$

となる。





まずは、D を図示する (左図)。左図より、右図のように縦線形に書いてみる。すなわち、$(x, y) \in D$ とすると、x の動く範囲 (取りうる範囲) は $0 \le x \le 1$ となる。$x = \alpha$ $(0 \le \alpha \le 1)$ のとき、y の動く範囲は $\alpha \le y \le \sqrt{2-\alpha^2}$ となるから、

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le \sqrt{2-x^2}\right\}$$

となる。

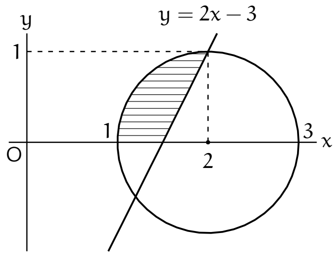
したがって、

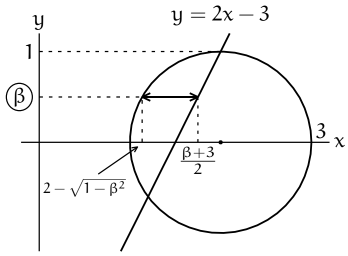
$$\iint_D \sqrt{x}y\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x}y\,dy\right) dx = \int_0^1 \sqrt{x}(1-x^2)\,dx = \frac{8}{21}$$

または、極座標変換するとよい。図より、θ の動く範囲は $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$、$r$ の動く範囲は $0 \le r \le \sqrt{2}$ となるから、D を r, θ に置き換えて、$E = \left\{(r, \theta) \mid 0 \le r \le \sqrt{2},\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ とおくと、

$$\iint_D \sqrt{x}y\,dxdy = \iint_E r^{\frac{3}{2}}\sqrt{\cos\theta}\sin\theta \cdot r\,drd\theta = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^{\frac{5}{2}} \sin\theta\sqrt{\cos\theta}\,d\theta\right) dr = \int_0^{\sqrt{2}} \left[-\frac{2}{3}r^{\frac{5}{2}}\cos^{\frac{3}{2}}\theta\,d\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dr = \frac{8}{21}$$

(4) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy, \quad D = \left\{(x, y) \mid y \ge 2x-3,\ (x-2)^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\right\}.$





まずは、D を図示する (左図)。左図より、右図のように縦線形に書いてみる。すなわち、$(x, y) \in D$ とすると、y の動く範囲 (取りうる範囲) は $0 \le y \le 1$ となる。$y = \beta$ $(0 \le \beta \le 1)$ のとき、x の動く範囲は $2 - \sqrt{1-\beta^2} \le x \le \frac{\beta+3}{2}$ となるから、

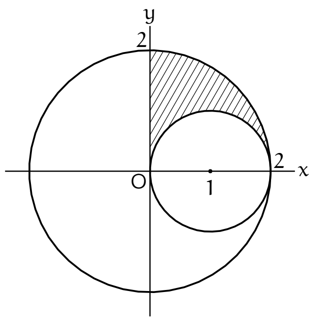
$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \le y \le 1,\ 2 - \sqrt{1-y^2} \le x \le \frac{y+3}{2}\right\}$$

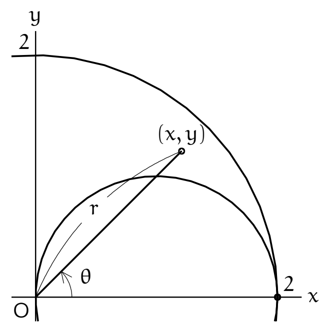
となる。

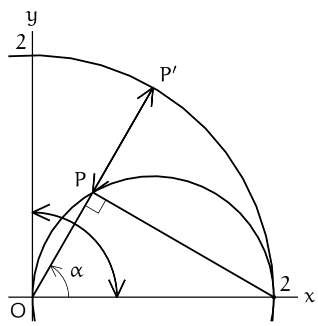
したがって、

$$\iint_D y\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{2-\sqrt{1-y^2}}^{\frac{y+3}{2}} y\,dx\right) dy = \int_0^1 y \cdot \frac{y+3}{2} - y\left(2 - \sqrt{1-y^2}\right) dy = \frac{1}{4}$$

(5) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \quad D = \left\{(x, y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ 2x \le x^2+y^2 \le 4\right\}.$







$x^2+y^2-2x = (x-1)^2+y^2-1$ より、D を図示する (左図)。ここでは、極座標変換してみる ‡。$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ ($(x, y) \in D$) とし、$P = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $P' = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$ とする。θ の動く範囲は $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ となる。$\theta = \alpha$ $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$ のとき、r の動く範囲は $|OP| \le r \le |OP'|$ となるから、$|OP| = 2\cos\alpha$, $|OP'| = 2$ より、D を r, θ で置き換えて

$$E = \left\{(r, \theta) \mid 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 2\cos\theta \le r \le 2\right\}$$

とおく。したがって、

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_E r \cdot r\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{2\cos\theta}^2 r^2\,dr\right) d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^3\theta)\,dy$$

† 縦線形の形に書くこともできる: $D = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ \sqrt{1-(x-1)^2} \le y \le \sqrt{2-x^2}\right\}$ しかし、$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\right) dx$ となって、計算はなかなか大変。被積分関数 $\sqrt{x^2+y^2}$ の形からも、極座標変換のほうが良さそうと考えるところ。

ここで、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(1-\sin^2\theta)\, d\theta = \left[\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$

となるから、$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \frac{4}{3}\pi - \frac{16}{9}$

2. (1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ すればよい。このとき、$\det J = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r} = r$ となる。D を r, θ に置き換えて、$E = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta\}$ とおくと、

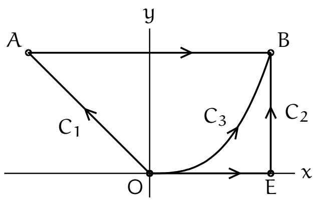
$$S = \iint_D dxdy = \iint_E r\, drd\theta = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{f(\theta)} r\, dr\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\, d\theta$$

(2) (a) ここは、(1) の式を利用すればよい。カーディオイドは $r = 1+\cos\theta\ (0 \le \theta \le 2\pi)$ で定義されるから、

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

(b) この問題の設定に誤りがありました。この問題は正否に関わらず、全員に 7 点を加える形にしたいと思います。極座標表示と勘違いして出題したために、(1) の公式を用いて面積を計算するのは困難です。失礼しました。

3. (1)



折れ線 OAB を線分 OA の部分と線分 AB の部分に分けてパラメータ付けする:

$$OA: x = -t,\ y = t,\ \text{向き}\ t: 0 \to 1, \qquad AB: x = t,\ y = 1,\ \text{向き}\ t: -1 \to 1$$

このとき、OA 上 $dx = -dt,\ dy = dt$ で、AB 上 $dx = dt,\ dy = 0$ となる。したがって、

$$\begin{aligned}\int_{C_1} ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy &= \int_{OA} ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy + \int_{AB} ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy \\ &= \int_0^1 te^{-t^2}(-dt) + (-t)e^{-t^2}\, dt + \int_{-1}^1 e^t\, dt \\ &= e - 1\end{aligned}$$

(2) 折れ線 OEB を線分 OE の部分と線分 EB の部分に分けてパラメータ付けする:

$$OE: x = t,\ y = 0,\ \text{向き}\ t: 0 \to 1, \qquad EB: x = 1,\ y = t,\ \text{向き}\ t: 0 \to 1$$

このとき、OE 上 $dx = dt,\ dy = 0$ で、EB 上 $dx = 0,\ dy = dt$ となる。したがって、

$$\int_{C_2} ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy = \int_{OE} ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy + \int_{EB} ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy = 0 + \int_0^1 e^t\, dt = e - 1$$

(3) $C_3: x = t,\ y = t^n$, 向き $t: 0 \to 1$ より、C_3 上 $dx = dt,\ dy = nt^{n-1}dt$ となるから、

$$\int_{C_3} ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy = \int_0^1 t^n e^{t^{n+1}}\, dt + te^{t^{n+1}} \cdot nt^{n-1}\, dt = \int_0^1 (n+1)t^n e^{t^{n+1}}\, dt = \left[e^{t^{n+1}}\right]_0^1 = e - 1$$

【解説】この問題の場合、$ye^{xy},\ xe^{xy}$ は $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級で $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ の形になっているので、Green の定理より、任意の閉曲線 C 上で $\int_C ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy = 0$ となる。$C_2 - C_1$ が閉曲線なので ($C_3 - C_1$ も)、$\int_{C_2 - C_1} ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy = 0$ となり、すなわち、

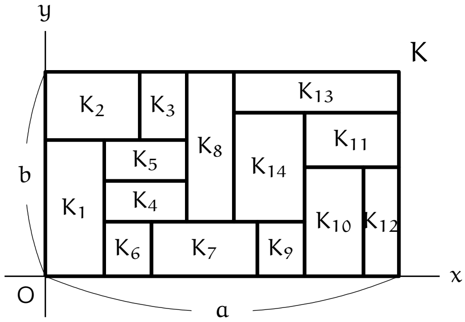
$$\int_{C_1} ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy = \int_{C_2} ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy = \int_{C_3} ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy$$

がわかる。ここでの Green の定理の効用は、線積分 $\int_{C_k} ye^{xy}\, dx + xe^{xy}\, dy\ (k = 1, 2, 3)$ の値を知るには、C_1, C_2, C_3 のどれかひとつ計算すれば良いということ。C_2 のような単純な曲線を選ぶと良い。

4. (1)

$$\iint_K \sin 2\pi x \, \sin 2\pi y \, dxdy = \int_{y_0}^{y_0+b} \left(\int_{x_0}^{x_0+a} \sin 2\pi x \, \sin 2\pi y \, dx \right) dy$$
$$= \int_{y_0}^{y_0+b} \left[-\frac{1}{2\pi} \cos 2\pi x \, \sin 2\pi y \right]_{x_0}^{x_0+a} dy$$
$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{y_0}^{y_0+b} \left(\cos 2\pi(x_0+a) - \cos 2\pi x_0 \right) \sin 2\pi y \, dy$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \cos 2\pi(x_0+a) - \cos 2\pi x_0 \right\} \cdot \left\{ \cos 2\pi(y_0+b) - \cos 2\pi y_0 \right\}$$

(2)



長方形のタイル K_i $(i = 1, \ldots, N)$ を重ならないように並べてできた大きな長方形を K とする。すなわち、$K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_N$ で、$K_i \cap K_j$ $(i \neq j)$ は面積 0 である ††。ここで、K の左下の角を原点に据えて $(x_0 = y_0 = 0)$、

$$K = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq a, \, 0 \leq y \leq b \right\}$$

と書くことにする。このとき、(1) より、

$$(1) \qquad \iint_K \sin 2\pi x \, \sin 2\pi y \, dxdy = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \cos 2\pi a - 1 \right\} \cdot \left\{ \cos 2\pi b - 1 \right\}$$

となる。

また、$K_i = \left\{ (x, y) \mid x_i \leq x \leq x_i + a_i, \, y_i \leq y \leq y_i + b_i \right\}$ と書くとき、仮定より、a_i または b_i の少なくともどちらか一方は整数である。よって、

$$\iint_{K_i} \sin 2\pi x \, \sin 2\pi y \, dxdy = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \cos 2\pi(x_i + a_i) - \cos 2\pi x_i \right\} \cdot \left\{ \cos 2\pi(y_i + b_i) - \cos 2\pi y_i \right\} = 0$$

n が整数のとき、
$\cos 2\pi(x+n)$
$= \cos(2\pi x + 2\pi n)$
$= \cos 2\pi x$

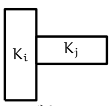
となる。$K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_N$ で、$K_i \cap K_j$ $(i \neq j)$ は面積 0 であるから、

$$\iint_K \sin 2\pi x \, \sin 2\pi y \, dxdy = \sum_{i=1}^{N} \iint_{K_i} \sin 2\pi x \, \sin 2\pi y \, dxdy = 0$$

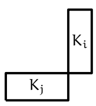
となる。したがって、(1) より、$\left(\cos 2\pi a - 1 \right) \cdot \left(\cos 2\pi b - 1 \right) = 0$ となる。これは、$\cos 2\pi a = 1$ または $\cos 2\pi b = 1$ という意味であるから、a または b の少なくとも一方は整数である。すなわち、長方形 K の少なくとも 1 辺は整数である。

††K_i たちを重ならないように並べているから、$i \neq j$ のとき、K_i と K_j は

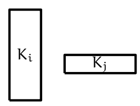
(a) 辺を共有している



(b) 点で接している



(c) 離れている (共通部分がない)



のようになる。したがって、いずれにせよ、$K_i \cap K_j$ は面積 0 である