レポート課題 略解　2015/11/18

総評：

全体的によくできていました。平均点は 74.6 点、最高点は 100 点です。やや難しい問題も取り上げていますが，だいたいが基本的です．いくつか気になった点をあげます:

- ▷ 積分の計算、というよりは、微分や有理式の計算をていねいに計算しましょう。ここでミスをすると積分計算のすべてが台無しになってしまいます。
- ▷ 大問 1. があまりできなかった人は、小テスト、“ひと目の積分” を復習しましょう。
- ▷ 広義積分の定義をもう一度見直しましょう。

得点表

1.	2.	3.	4.	5.	6.		
4 (×9)	2 (×3)	3 (×3)	6 (×3)	5 (×3)	8	4	4
36	6	9	18	15	16		

---

1. (1) $$\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx = \log|x+1| - \log|x+2|$$

(2) $$\int \frac{x}{x^2+6x+11}\,dx = \int \frac{x}{(x+3)^2+2}\,dx = \int \frac{u-3}{u^2+2}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+2}\,du - \int \frac{3}{u^2+2}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\log(u^2+2) - \frac{3}{2}\operatorname{Arctan}\frac{u}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = \frac{1}{2}\log(x^2+6x+11) - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{x+3}{\sqrt{2}}$$

$u = x+3$, $du = dx$

(3) $$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{u+u^{-1}} \cdot \frac{1}{u}\,du = \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \operatorname{Arctan} e^x$$

$u = e^x$, $du = e^x\,dx = u\,dx$

(4) $$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x-2)^2+2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arcsin}\frac{x-2}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}$$ とするのが簡単で計算が早く、または、

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-2}}\,dx = \int \frac{1+u^2}{2\sqrt{2}\,u} \cdot \frac{4\sqrt{2}\,u}{(1+u^2)^2}\,du = \int \frac{2}{1+u^2}\,du = 2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{-x+2-\sqrt{2}}{x-2-\sqrt{2}}}$$

$u = \sqrt{\dfrac{-x+2-\sqrt{2}}{x-2-\sqrt{2}}}$ $\rightsquigarrow$ $x = \dfrac{2-\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})u^2}{1+u^2}$, $dx = \dfrac{4\sqrt{2}u}{(1+u^2)^2}\,du$

(5) $$\int e^{x-e^x}\,dx = \int ue^{-u} \cdot \frac{1}{u}\,du = -e^{-u} = -e^{-e^x}$$

$u = e^x$, $du = e^x\,dx = u\,dx$

(6) $$\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2+2x-3}\,dx = \int (x-1)\,dx + \int \frac{4x}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \int \frac{4x}{(x+3)(x-1)}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \int\left(\frac{3}{x+3} + \frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - x + 3\log|x+3| + \log|x-1|$$

(7) $$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}\,dx = \int \frac{2t}{t^2-1} \cdot \frac{t^2-1}{4t^2}\,dt = \int \frac{1}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\log\left|2x + \sqrt{4x^2-1}\right|$$

$\sqrt{4x^2-1} = t - 2x$ $\rightsquigarrow$ $x = \dfrac{t^2+1}{4t}$, $dx = \dfrac{t^2-1}{4t^2}\,dt$

(8) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \frac{1}{u^2+u} \cdot 4u^3\,du = \int \frac{4u^2}{u+1}\,du = 4\int\left(u - 1 + \frac{1}{u+1}\right)du$$
$$= 4\left(\frac{1}{2}u^2 - u\right) + 4\log|u+1| = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\log\left|\sqrt[4]{x}+1\right|$$

$u = \sqrt[4]{x}$ $\rightsquigarrow$ $x = u^4$, $dx = 4u^3\,du$

(9) $$\int \frac{1}{3+2\sin x}\,dx = \int \frac{1}{3+2\cdot\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{2}{3u^2+4u+3}\,du$$
$$= 2\cdot\frac{3}{5}\operatorname{Arctan}\frac{3u+2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{Arctan}\frac{3\tan\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}$$

$u = \tan\dfrac{x}{2}$, $du = \dfrac{1+u^2}{2}\,dx$

2. (1) $\dfrac{\mu}{N(\mu-N)} = \dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{\mu-N}$ より、$\dfrac{\mu}{N(\mu-N)}dN = \gamma dt$ の両辺を積分して、

(†) $$\gamma t + C = \int \gamma\,dt = \int \frac{\mu}{N(\mu-N)}\,dN = \int \frac{1}{N}\,dN + \int \frac{1}{\mu-N}\,dN = \log\left(\frac{N}{\mu-N}\right).$$

ここで、C は積分定数。

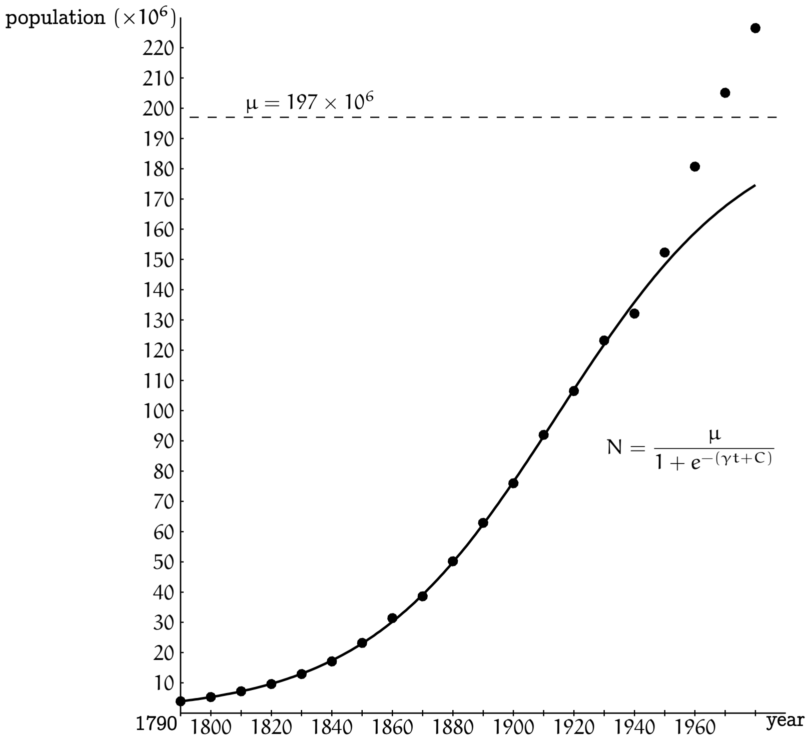
(2) 式 (†) に、$t=0$ を代入して、$C=\log\left(\frac{N_0}{\mu-N_0}\right)$. また、式 (†) より、$e^{\gamma t+C}=e^{\log\left(\frac{N}{\mu-N}\right)}=\frac{N}{\mu-N}$. これを N について解いて、

(††)
$$N=\frac{\mu}{1+e^{-(\gamma t+C)}}$$

を得る。

式 (††) と $e^C=\frac{N_0}{\mu-N_0}>0$ より、$t\geq 0$ のとき、$N(t)>0$。ゆえに、$\frac{dN}{dt}=\gamma N\cdot\frac{\mu-N}{\mu}>0$。また、$\lim_{t\to\infty}N(t)=\mu$, $\lim_{t\to\infty}\frac{dN}{dt}=0$。したがって、単調増加で直線 $y=\mu$ に漸近するようなグラフを書けば良い (変曲点は問わない)。

実際に、1790〜1980 年の間の米国の人口増加と較べてみる*。$N_0=3.9\times 10^6$, $\mu=197\times 10^6$, $\gamma=0.3134$ とし、実際の人口の値と $N(t)$ から得られる予測値を右下の表に示してある。$\lim_{t\to\infty}N(t)=\mu$ より、μ は人口増加の上限値を意味している。また、$N(t)$ のグラフを描くと下図のようになる。各点は、各年度の実際の人口をプロットしたものである。この数理モデルは、1790〜1930 年という長い間、実際の人口の増加具合とよく似ているが、それ以降は大きく離れていく。



年度	人口 $(\times 10^6)$	予測値 $(\times 10^6)$
1790	3.9	3.9
1800	5.3	5.2
1810	7.2	7.1
1820	9.6	9.6
1830	12.9	13.0
1840	17.1	17.3
1850	23.2	23.0
1860	31.4	30.2
1870	38.6	39.1
1880	50.2	49.8
1890	62.9	62.4
1900	76.0	76.4
1910	92.0	91.5
1920	106.5	106.9
1930	123.2	121.9
1940	132.1	135.8
1050	152.3	148.2
1960	180.7	158.8
1970	205.1	167.5
1980	226.5	174.5

表：年度ごとの米国の人口と予測値

3. (1) $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続ではないことに注意して描く。図は次のページに。

(2) $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x \sin t\,dt=-\cos x+1$

$\dfrac{\pi}{2}<x\leq\pi$ のとき　$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt+\lim_{\epsilon\to+0}\int_{\frac{\pi}{2}+\epsilon}^x \cos t\,dt=1+\lim_{\epsilon\to+0}\Big[\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}+\epsilon}^x=\sin x$

また、$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}F'(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin x=1$, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}F'(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\cos x=0$ となるから、$x=\frac{\pi}{2}$ で $F(x)$ は微分可能ではないことに注意する。

(3) $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$G(x)=\displaystyle\int_0^x F(t)\,dt=\int_0^x(-\cos t+1)\,dt=x-\sin x$

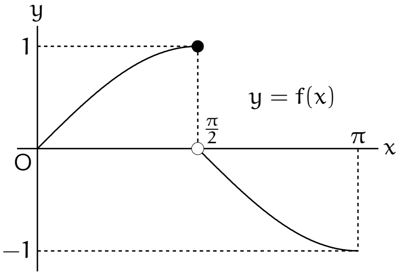
$\dfrac{\pi}{2}<x\leq\pi$ のとき　$G(x)=\displaystyle\int_0^x F(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t+1)\,dt+\lim_{\epsilon\to+0}\int_{\frac{\pi}{2}+\epsilon}^x \sin t\,dt$

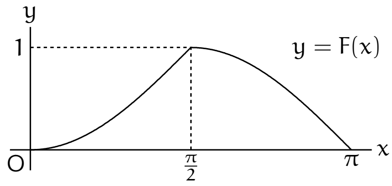
$$=\frac{\pi}{2}-1+\lim_{\epsilon\to+0}\Big[\cos t\Big]_{\frac{\pi}{2}+\epsilon}^x=-\cos x+\frac{\pi}{2}-1$$

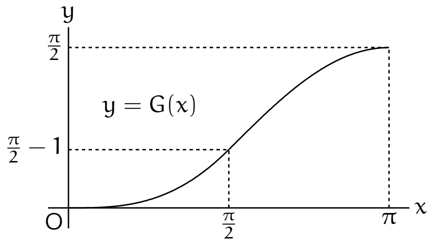
*参考書は “微分方程式で数学モデルを作ろう” (デヴィッド・バージェス、モラグ・ボリー著、垣田高夫、大町比佐栄訳/日本評論社)。この人口増加モデルの他、薬の吸収、人工腎臓器の数理モデル、刺激に対する反応、惑星の運動、化学反応速度論、種の相互作用、伝染病、などの多分野にわたる数理モデルが紹介されていて、今までの微分積分学 II の知識で問題なく読み進めることができる。また、“カオスとフラクタル” (山口昌哉著/ちくま学芸文庫) もおすすめである。

また、$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} G'(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\cos x + 1) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} G'(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\sin x = 1$ となるから、$x = \frac{\pi}{2}$ で $G(x)$ は微分可能である。

これは、閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $g(x)$ の不定積分 $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$ は微分可能で $G'(x) = g(x)$ となる、という一般的事実 (定理) である。(2) については、$f(x)$ が連続でなかったために、この定理が適用できず、$F(x)$ の微分可能性が保証されなかった (実際に $x = \frac{\pi}{2}$ で微分可能でなかった)。







4. (1) $$\int \frac{\sin x + 3\cos x}{1 + 2\sin x + \cos x}\,dx = \int \frac{\frac{2u}{1+u^2} + 3\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1 + 2\cdot\frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{-3u^2 + 2u + 3}{(2u+1)(u^2+1)}\,du$$

$u = \tan\frac{x}{2}$
$du = \frac{1+u^2}{2}\,dx$

$$= \int\left(\frac{1}{2u+1} - \frac{2(u-1)}{u^2+1}\right)du$$
$$= \log|2u+1| \times \frac{1}{2} - \int \frac{2u}{u^2+1}\,du + 2\int\frac{1}{u^2+1}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\log|2u+1| - \log(u^2+1) + 2\,\mathrm{Arctan}\,u$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|2\tan\frac{x}{2} + 1\right| - \log\left(\tan^2\frac{x}{2} + 1\right) + x$$

$u = \tan\frac{x}{2} \Longleftrightarrow \mathrm{Arctan}\,u = \frac{x}{2}$

(2) $$\int\frac{1}{(x+4)\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int\frac{t^2+1}{2(t^2+3)}\cdot\frac{t^2+1}{4t}\cdot\frac{-8t}{(t^2+1)^2}\,dt = -\int\frac{1}{t^2+3}\,dt$$

$t = \sqrt{\frac{-x+2}{x+2}} \rightsquigarrow x = \frac{-2(t^2-1)}{t^2+1}$
$dx = \frac{-8t}{(t^2+1)^2}\,dt$

$$= -\frac{1}{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{t}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\frac{-x+2}{3(x+2)}}$$

(3) 部分積分法で解いてみる。$\displaystyle\left(\mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{2+x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2+x}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+x}{x}}\cdot\frac{1\cdot(2+x) - x\cdot 1}{(2+x)^2} = \frac{1}{(2+x)\sqrt{2x}}$ となるから、

$$\int_0^2 \mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{2+x}}\,dx = \left[x\,\mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right]_0^2 - \int_0^2 x\cdot\frac{1}{(2+x)\sqrt{2x}}\,dx$$
$$= 2\,\mathrm{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}}\frac{t}{2+t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2t\,dt$$

$t = \sqrt{x}$
$dt = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2t}\,dx$

$$= \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{2}{2+t^2}\right)dt$$
$$= \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\left[t - 2\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\frac{t}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$= \pi - 2$$

または、

$$\int_0^2 \mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{2+x}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{Arcsin}\,u\cdot\frac{4u}{(u^2-1)^2}\,du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{Arcsin}\,u\cdot\left(\frac{1}{u^2-1}\right)'\cdot(-2)\,du$$

$u = \sqrt{\frac{x}{2+x}} \rightsquigarrow x = \frac{-2u^2}{u^2-1}$
$dx = \frac{4u}{(u^2-1)^2}\,du$

$$= -2\left[\mathrm{Arcsin}\,u\cdot\frac{1}{u^2-1}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{u^2-1}\,du$$

$t = \sqrt{\frac{-u+1}{u+1}} \rightsquigarrow u = \frac{1-t^2}{t^2+1}$
$du = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}\,dt$

$$= 4\,\mathrm{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\int_1^{\sqrt{2}-1}\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{(t^2+1)^2}{-4t^2}\cdot\frac{-4t}{(t^2+1)^2}\,dt$$
$$= \pi + \int_1^{\sqrt{2}-1}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt = \pi + \left[t - \frac{1}{t}\right]_1^{\sqrt{2}-1} = \pi - 2$$

5. (1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx + \lim_{N\to\infty}\int_2^N \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx$

ここで、

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx = \int \frac{1}{(t^2+1)^2\cdot t}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2}{(t^2+1)^2}\,dt \qquad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} t &= \sqrt{x-1} \\ x &= \sqrt{t^2+1} \\ dx &= 2t\,dt \end{aligned}$$

$$= \int 2\cos^2 u\,du = \int (\cos 2u + 1)\,du = \frac{1}{2}\sin 2u + u \qquad \begin{aligned} &t = \tan u \\ &dt = \frac{1}{\cos^2 u}\,du = (1+t^2)\,du \end{aligned}$$

$$= \frac{t}{1+t^2} + \mathrm{Arctan}\,t \qquad \sin 2u = 2\sin u\cos u = \frac{2t}{1+t^2}$$

したがって、

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int_{\sqrt{\epsilon}}^1 \frac{2}{(t^2+1)^2}\,dt + \lim_{N\to\infty}\int_1^{\sqrt{N-1}} \frac{2}{(t^2+1)^2}\,dt$$
$$= \lim_{\epsilon\to+0}\left[\frac{t}{1+t^2} + \mathrm{Arctan}\,t\right]_{\sqrt{\epsilon}}^1 + \lim_{M\to\infty}\left[\frac{t}{1+t^2} + \mathrm{Arctan}\,t\right]_1^M = \frac{\pi}{2}$$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx + \lim_{\delta\to+0}\int_{1+\delta}^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,dx$

$$= \lim_{\epsilon\to+0}\left[2\sqrt{1-x}\times(-1)\right]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\delta\to+0}\left[2\sqrt{x-1}\right]_{1+\delta}^2 = 4$$

(3) $\displaystyle I = \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx = \lim_{\epsilon\to+0}\int_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx + \lim_{\delta\to+0}\int_2^{3-\delta} \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx$

ここで、$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x-2)^2+1}}\,dx = \mathrm{Arcsin}(x-2)$ となるから、

$\displaystyle I = \lim_{\epsilon\to+0}\bigl(\mathrm{Arcsin}\,0 - \mathrm{Arcsin}(-1+\epsilon)\bigr) + \lim_{\delta\to+0}\bigl(\mathrm{Arcsin}(1-\delta) - \mathrm{Arcsin}\,0\bigr) = \pi$

6. (1) 加法定理から、

$$\sin mx\sin nx = \frac{1}{2}\bigl(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\bigr), \qquad \cos mx\cos nx = \frac{1}{2}\bigl(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\bigr),$$
$$\sin mx\cos nx = \frac{1}{2}\bigl(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\bigr)$$

となることを利用する。また、三角関数の周期性を考えれば、$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx = 0$ $(k\geq 1)$ となる。$k=0$ のときは、$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx = 0$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}dx = 2\pi$ となる。したがって、

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\bigl(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\bigr)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos(m-n)x\,dx & (m\neq n) \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dx & (m=n) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & (m\neq n) \\ \pi & (m=n) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\bigl(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\bigr)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos(m-n)x\,dx & (m\neq n) \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dx & (m=n) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & (m\neq n) \\ \pi & (m=n) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\bigl(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\bigr)dx = 0$$

(2) (1) の結果と $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx = 0$ $(k \geq 1)$ を利用する。$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ であるから、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{n} a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx + \sum_{k=1}^{n} b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx = 2\pi a_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + \sum_{k=1}^{n} a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx + \sum_{k=1}^{n} b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx = \pi a_n \quad (n \geq 1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx + \sum_{k=1}^{n} a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,dx + \sum_{k=1}^{n} b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,dx = \pi b_n \quad (n \geq 1)$$

(3) 部分積分法を使う。$f(x) = x^3$ なので、

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\cos nx\,dx = 0 \quad (\because\ x^3\cos nx \text{ は奇関数だから}^*) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\sin nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[x^3\cdot\frac{-1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 3x^2\cdot\frac{-1}{n}\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi^3\cdot\frac{-1}{n}\cos n\pi - \frac{1}{\pi}\left[3x^2\cdot\frac{-1}{n^2}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 6x\cdot\frac{-1}{n^2}\sin nx\,dx \\
&= (-1)^{n+1}\frac{2\pi^2}{n} + \frac{1}{\pi}\left[6x\cdot\frac{1}{n^3}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 6\cdot\frac{1}{n^3}\cos nx\,dx \qquad (\cos n\pi = (-1)^n) \\
&= (-1)^{n+1}\frac{2\pi^2}{n} + \frac{1}{\pi}\cdot 12\pi\cdot\frac{1}{n^3}\cos n\pi \\
&= (-1)^{n+1}\frac{2\pi^2}{n} + (-1)^n\frac{12}{n^3}
\end{aligned}$$

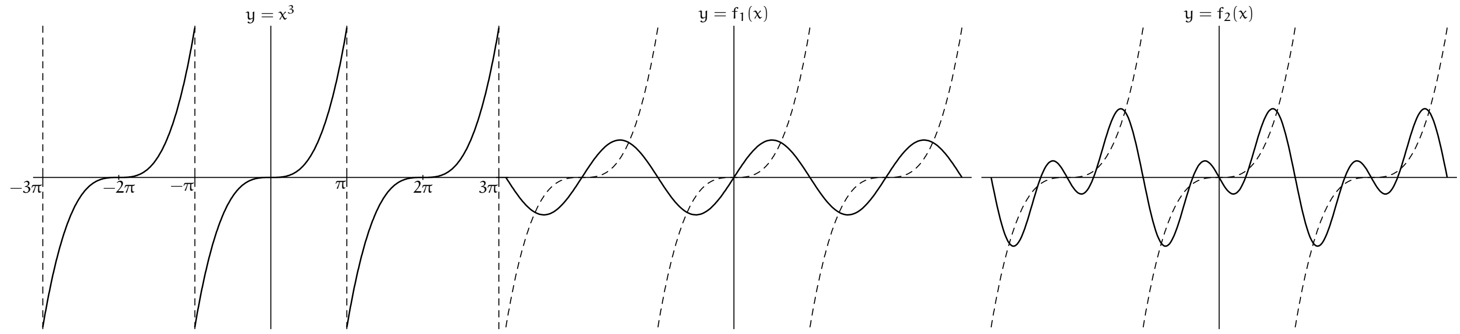
(2) では、$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ と表される関数 $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ について

$$(\star) \qquad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (1 \leq k \leq n), \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (1 \leq k \leq n)$$

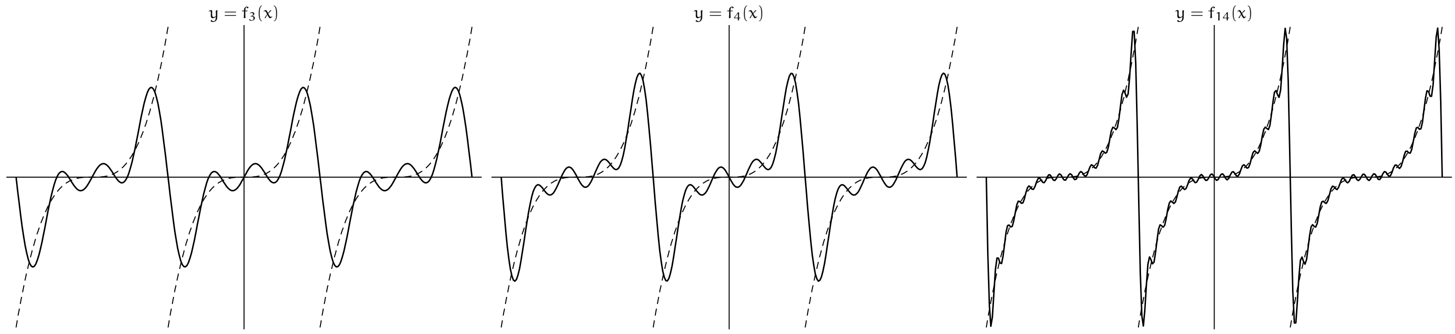
が成り立つことを示した。(3) では逆に、$f(x) = x^3$ が与えられたとき、$(\star)$ により、実数 a_0, a_k, b_k を求めた。実はこれにより、$f(x) = x^3$ は次のように近似される:

$$(\star\star) \qquad x^3 \fallingdotseq a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \sum_{k=1}^{n}\left\{(-1)^{k+1}\frac{2\pi^2}{k} + (-1)^k\frac{12}{k^3}\right\}\sin kx$$

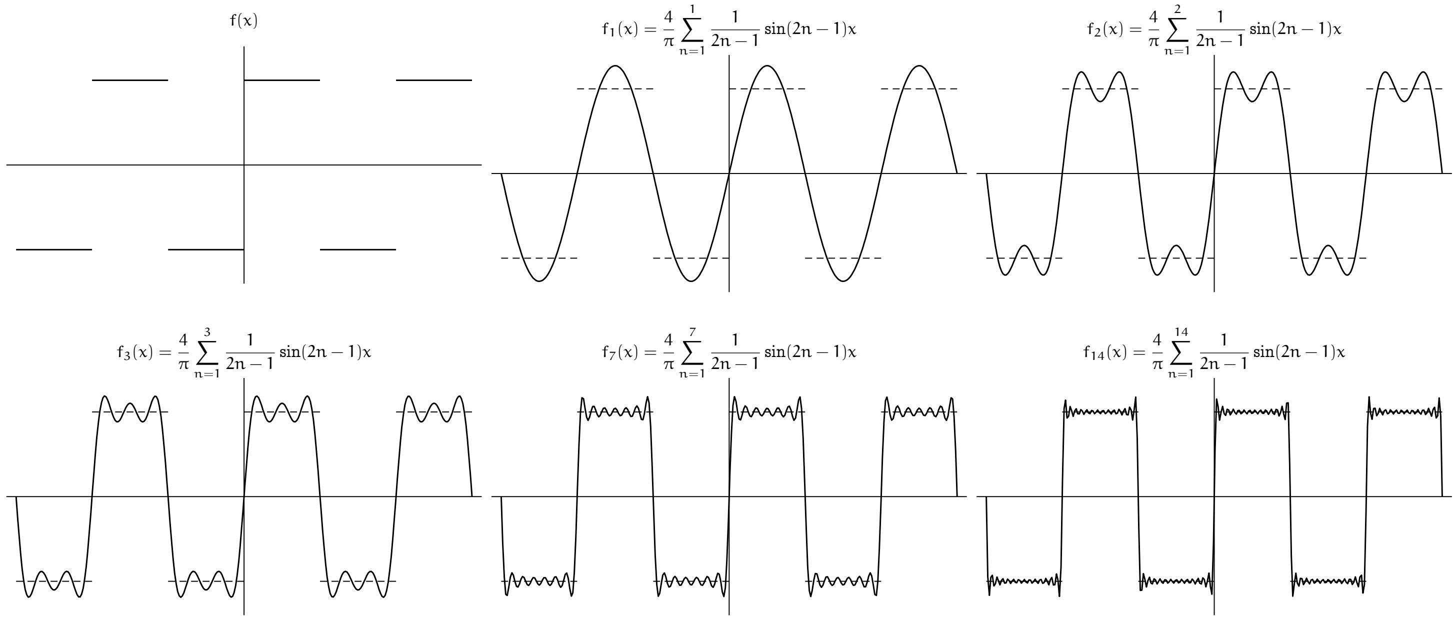
右辺をFourier(フーリエ)多項式という。さらに、極限 $n \to \infty$ を考えたものを Fourier 級数という。収束の条件については (他の講義で詳しく学ぶときがくるかもしれない)、少なくとも $[-\pi, \pi]$ 上連続な関数は Fourier 級数が収束して、元の関数 $f(x)$ に一致する。$(\star\star)$ の右辺の関数を $f_n(x)$ とおいて $y = f_n(x)$ のグラフをプロットしたものと $y = x^3$ のグラフを $x = -\pi, \pi$ のところで周期的に並べたものを比較してみよう:



*奇関数とは、$g(x) = -g(-x)$ となる関数だから、$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} g(x)\,dx + \int_{-\pi}^{0} g(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} g(x)\,dx + \int_{\pi}^{0} g(-t)\cdot(-1)\,dt = 0$ $\begin{smallmatrix} t=-x \\ dt=-dx \end{smallmatrix}$ となる。



他には、$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$ に対しては、Fourier 級数は $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$ となる。



解説中、暇な人のための問題

1. $f(x) = x$ の Fourier 級数を求めよ。この級数に $x = \frac{\pi}{2}$ を代入したものは $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ と等しくなる。これより、Leibnitz の公式 (S1) を得よ。また、$f(x) = x^2$ の Fourier 級数を求め、これに適当な値を代入し、(S2) と (S3) を得よ。また、$f(x) = |x|$ の Fourier 級数を求め、これに適当な値を代入し、(S4) を得よ。また、$f(x) = x^3$ の Fourier 級数と他の級数とを組み合わせて、(S5) を得よ。

(S1) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots$$

(S2) $$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

(S3) $$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \cdots$$

(S4) $$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots$$

(S5) $$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} - \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \frac{1}{13^3} + \cdots$$

2. 次の広義積分は収束するか、発散するか、判定せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^4}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

3. 次を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int \frac{x^6+1}{x^3+1}\,dx$