

微分積分 II 小課題第 4 回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

3年 ___ 科 ___ 番 氏名 _____

1. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{e^x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x}} \log x$

2. $f(x) = \log x$ について、次の問いに答えよ。

(1) $0 < a < b$ とする。 $f(x)$ に平均値の定理を適用して、

(2) (1) の結果を利用して、

$$\frac{\log b - \log a}{b - a} = \frac{1}{c} \quad (c \in (a, b))$$

$$\frac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \frac{1}{x}$$

となることを示せ。

を示せ。

(3) (2) を利用して、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \log(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

となることを示せ。

3. $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ ($-1 < x < 1$) に対して、次の問いに答えよ。

(1) $x = 0$ における $f(x)$ の 2 次近似式を求めよ。

(2) (1) を利用して、 $\log 3, \log 5, \log 7$ の近似値を求めよ。

4. $f(x)$ をある区間 I で 2 回微分可能とし、 $f''(x) > 0$ が成り立っているとする。 n 個の正の実数 $x_k > 0$ ($1 \leq k \leq n$) に対して、 $x_0 = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ とおくと、次の問いに答えよ。

(1) $x = x_0$ における $f(x)$ の 1 次近似式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(c)(x - x_0)^2$$

(ただし、 c は x と x_0 の間の実数) を利用して、

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \geq n f(x_0)$$

を示せ。

(2) $f(x) = -\log x$ とする。このとき、(1) を利用して、相加平均と相乗平均の関係式

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

を示せ。

4. 解

3. (1) $f(x) = 2x - \frac{3}{4} \log 5 = 1, \log 5 = \frac{3}{4}, \log 3 = 1.3333 \dots, \log 7 = \frac{2}{3} = 1.5$

2. (1) (平均値の定理をよく見て適用) (2) $(b = x + 1, a = x)$ とすると、 c はどの範囲にあるかな? (3) (和をとるだけ)

1. (1) 1 (2) 1 (3) 0 (4) 0