微分積分 II 小課題第 10 回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

3 年 ___ 科 ___ 番 氏名 ____________________

1. 関数 $z = f(x,y) = x^2 - y^2$ について、次の問いに答えよ。

(1) Lagrange の未定乗数法を用いて、条件 $g(x,y) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0$ の下で、$z = f(x,y)$ の極値の候補となる点 (a,b) を求めよ。

(2) 条件 $g(x,y) = 0$ より、$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を x, y を用いて表わせ。

(3) y を x の関数として、$\dfrac{dz}{dx}$, $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ を x, y, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を用いて表わせ。

(4) $g_y(a,b) \neq 0$ となる (1) の点 (a,b) について、極値をとる点かどうか判定せよ。

今日は裏にも問題があります！

2. 関数 $z = f(x, y) = x^3(1 - y)$ について、次の問いに答えよ。

(1) Lagrange の未定乗数法を用いて、条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で、$z = f(x, y)$ の極値の候補となる点 (a, b) を求めよ。

(2) 条件 $g(x, y) = 0$ より、$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を x, y を用いて表わせ。

(3) y を x の関数として、$\dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2z}{dx^2}$ を $x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を用いて表わせ。

(4) $g_y(a, b) \neq 0$ となる (1) の点 (a, b) について、極値をとる点かどうか判定せよ。

略解

1. (1) $(0, \pm 2), (\pm 3, 0)$ (2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{9y}, \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{4(4x^2 + 9y^2)}{81y^3} = -\dfrac{16}{9y^3}$ (3) $\dfrac{dz}{dx} = 2x - 2y\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2z}{dx^2} = 2 - 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (4) $(0, \pm 2)$ で極小

2. (1) $(0, \pm 1), (\pm\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4})$ (2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}, \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{y^3}$ (3) $\dfrac{dz}{dx} = 3x^2(1 - y) - x^3\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2z}{dx^2} = 6x(1 - y) - 6x^2\dfrac{dy}{dx} - x^3\dfrac{d^2y}{dx^2}$ (4) $(0, \pm 1)$ について、この方法では判定できない。$(\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4})$ で極大、$(-\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4})$ で極小。