微分積分 II 小課題第 13 回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

3年 ___ 科 ____ 番 氏名 ______________________

1. 次の積分値を求めよ。

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy,$

$D = \left\{(x, y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D x^2 dxdy, \quad D = \left\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq x\right\}.$

ただし、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\,dx = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$ であることを用いてよい。

(3) $\displaystyle\iint_D (x-y)e^{x+y} dxdy,$

$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leq x+y \leq 4,\ 0 \leq x-y \leq 4\right\}$

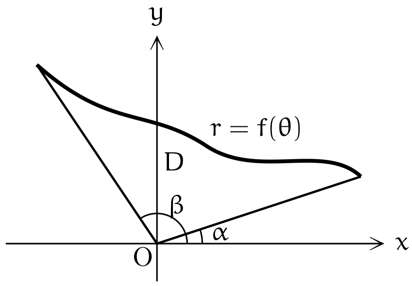
(4) $\displaystyle\iint_D (2x-y)\,dxdy,$

$D = \left\{(x, y) \mid x \leq y \leq 2x,\ x+y \leq 3\right\}.$

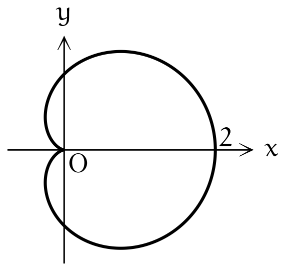
$u = x,\ v = y - x$ とおいて、変数変換せよ。c.f. 小課題 16 (4)

今日は裏にも問題があります！

2. 右下図のように $r = f(\theta)$ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ と極座標表示された曲線と直線 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ で囲まれる図形 D の面積を S とする。



(1) $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$ となることを示せ。ヒント: $S = \displaystyle\iint_D dxdy$ から極座標変換せよ。



Cardioid

(2) (1) の公式を利用して、Cardioid（カージオイド） $r = 1 + \cos\theta$ の面積を求めよ。

略解

1. (1) $\dfrac{3}{4}\pi$ (2) $\dfrac{5}{64}\pi$ (3) $4(e^4 - 1)$ (4) $\dfrac{3}{8}$

2. (1) 略 ($D' = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ 0 \leq r \leq f(\theta)\}$ となる) (2) $\dfrac{3}{2}\pi$