代数・幾何 I 小課題第 3 回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

2年 M 科 ＿＿ 番 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 次のベクトルに垂直な単位ベクトルを求めよ。

(1) $\vec{a}=(4,1)$

求めるベクトルを $\vec{p}=(x,y)$ とすると、

$\vec{p}\cdot\vec{a}=0$ より、 $4x+y=0$ —①

$\vec{p}$ は単位ベクトルだから、 $1=|\vec{p}|^2=x^2+y^2$ —②

②に①を代入して、

$x^2+(-4x)^2=1$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$y=-4x=\mp\frac{1}{\sqrt{17}}$

∴ $\vec{p}=\left(\frac{1}{\sqrt{17}},-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$,

$\left(\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

(2) $\vec{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ (α は実数)

求めるベクトルを $\vec{p}=(x,y)$ とすると、

$\vec{p}\cdot\vec{a}=0$ より、 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=0$

$\vec{p}$ は単位ベクトルだから、 $x^2+y^2=1$.

$x^2\cos^2\alpha+y^2\cos^2\alpha=\cos^2\alpha$

$(-y\sin\alpha)^2+y^2\cos^2\alpha=\cos^2\alpha$

$y^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha$

$y=\pm\cos\alpha$

∴ $x\cos\alpha\pm\cos\alpha\sin\alpha=0$

$\cos\alpha\neq0$ ならば $x=\mp\sin\alpha$.

∴ $\vec{p}=(-\sin\alpha,\cos\alpha)$,

$(\sin\alpha,-\cos\alpha)$.

$\cos\alpha=0$ なら、 $\vec{b}=(0,1)$.

これに垂直なのは $(1,0)$, $(-1,0)$

これは上の $\vec{p}$ の式に等しい。

2. 1 次独立な 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して、

$$\vec{c}=\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

により、ベクトル $\vec{c}$ を定める。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{c}$ は直交していることを示せ。†

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\right)$

$=\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\cdot\vec{a}$ 　 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

$=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

(2) $\vec{a}=(2,4)$, $\vec{b}=(3,1)$ とするとき、$\vec{c}$ の成分表示を求めよ。また、このときの $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を作図せよ。ここで、各ドットの縦横の間隔は 1 とする。

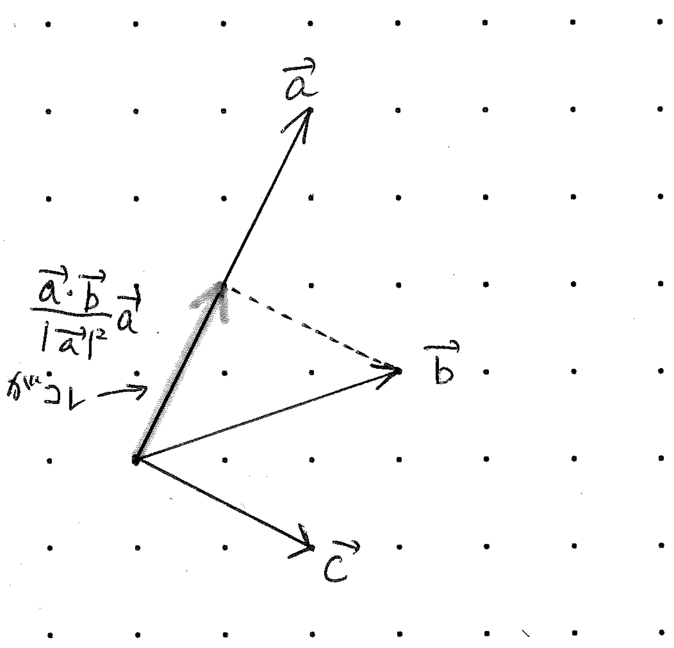
$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3+4\times1=10$

$|\vec{a}|^2=2^2+4^2=20$.

∴ $\vec{c}=\vec{b}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

$=(3,1)-\frac{10}{20}(2,4)$

$=(2,-1)$.



† このように、与えられたベクトルたちから直交するベクトルたちを作る方法をシュミット (Schmidt) の直交化という。また出てくるので、覚えておいて！