代数・幾何 I 小課題第４回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

２年 M 科 ____ 番 氏名 ____________

1. 座標平面上の４点 A = (1, 2), B = (−3, 4), C = (x, 0), D = (−1, y) が一直線上にあるとき、x, y の値を求めよ。

3点A, B, Cが一直線上にあるので、

$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ となる k がある。

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = -(1,2)+(x,0) = (x-1,-2)$ 比較

$k\overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}) = k(-(1,2)+(-3,4)) = k(-4,2) = (-4k, 2k)$

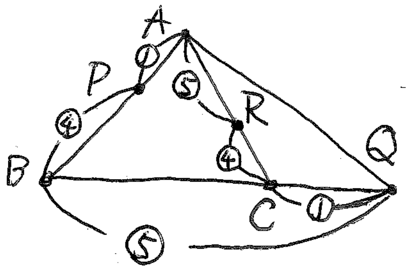
$\therefore \begin{cases} x-1 = -4k \\ -2 = 2k \end{cases}$

$k = -1$

$\therefore x = -4k+1 = 4+1 = 5$

裏へ→

2. △ABC において、線分 AB を 1 : 4 に内分する点を P、線分 BC を 5 : 1 に外分する点を Q、線分 AC を 5 : 4 に内分する点を R とするとき、次の問いに答えよ。



(1) $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とするとき、$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表わせ。

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ (← AB : AP = 5 : 1)

$= \frac{1}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{AR} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$ (← AC : AR = 9 : 5)

$= \frac{5}{9}\vec{c}$

$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}$　　BQ : BC = 5 : 4

$= \vec{b} + \frac{5}{4}\overrightarrow{BC}$

$= \vec{b} + \frac{5}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$

$= \vec{b} + \frac{5}{4}(-\vec{b}+\vec{c}) = -\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{5}{4}\vec{c}$ ← 別解は裏

(2) 3 点 P, Q, R が一直線上にあることを示せ。また、PR : RQ の値を求めよ。

($\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PR}$ の形に書けることを示せばよい)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{5}\vec{b} + \left(-\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{5}{4}\vec{c}\right)$

$= -\frac{9}{20}\vec{b} + \frac{5}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AR} = -\frac{1}{5}\vec{b} + \frac{5}{9}\vec{c}$

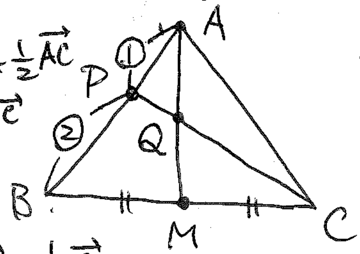
$= \frac{1}{5} \times \frac{20}{9} \times \left(-\frac{9}{20}\right)\vec{b} + \frac{5}{9}\vec{c}$

$\vec{b}$ の係数に注目

$= \frac{4}{9}\left(-\frac{9}{20}\vec{b} + \frac{5}{4}\vec{c}\right) = \frac{4}{9}\overrightarrow{PQ}$

裏へ→

3. △ABC において、線分 BC の中点を M、線分 AB を 1 : 2 に内分する点を P、線分 AM と線分 CP の交点を Q とするとき、次の問いに答えよ。



(1) $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とするとき、$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AM}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表わせ。

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (← AP : AB = 1 : 3)

$= \frac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

$= \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$= \vec{b} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$

$= \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

内分の公式から

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表わせ。また、CQ : QP を求めよ。[†]

点Qは線分PC上にあるから、

$\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AC} + (1-t)\overrightarrow{AP}$ と書ける。

$\overrightarrow{AQ} = t\vec{c} + (1-t)\cdot\frac{1}{3}\vec{b}$ — ①

また、点Qは線分AM上にあるから、

$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AM}$ と書ける。

$\overrightarrow{AQ} = k\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{2}k\vec{b} + \frac{1}{2}k\vec{c}$ — ②

①と②を比較して、

$\begin{cases} t = \frac{1}{2}k \\ \frac{1}{3}(1-t) = \frac{1}{2}k \end{cases}$

$k = 2t$

$\frac{1}{3}(1-t) = \frac{1}{2} \times 2t$

$1-t = 3t$

$t = \frac{1}{4}$

$\therefore k = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore \overrightarrow{AQ} \overset{②}{=} \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

裏へ→

[†] ヒント: 点 Q は線分 CP 上にあるから、$\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AC} + (1-t)\overrightarrow{AP}$ と書ける。一方、点 Q は線分 AM 上にあるから、$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AM}$ と書ける。この２条件から Q の位置を決定せよ。

1.（続き）

3点A, B, Dが一直線上にあるので，

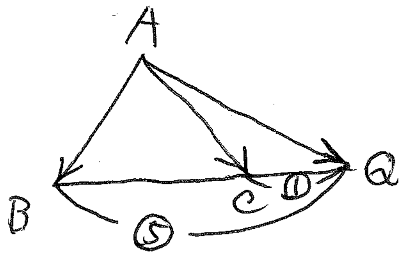
$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ となる k がある．

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = -(1, 2) + (-1, y) = (-2, y-2)$　比較

$k\overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = k(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = k(-(1, 2) + (-3, 4)) = k(-4, 2) = (-4k, 2k)$

$$\therefore \begin{cases} -2 = -4k \\ y-2 = 2k \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} k = \frac{1}{2} \\ y = 2k+2 = 3 \end{array}$$

2(1)（別解）　Qは線分BCを5:1に外分するので，



$$\overrightarrow{AQ} = \frac{-1\cdot\overrightarrow{AB} + 5\cdot\overrightarrow{AC}}{5-1}$$

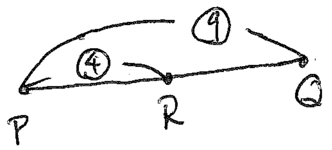
$$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{5}{4}\vec{c}.$$

内分・外分の公式使う方が楽．
公式忘れたら，表面のように求めればよい．

（続き）
(2) $\overrightarrow{PR} = \frac{4}{9}\overrightarrow{PQ}$ より，　PR : PQ = 4 : 9

$\therefore$ PR : RQ = 4 : 9−4 = 4 : 5.



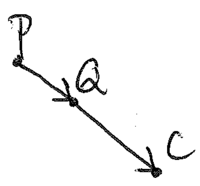
3(2)（続き）　$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{3}\vec{b} + \left(\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\right) = -\frac{1}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$

$= -\frac{1}{3}\vec{b} + 4\times\frac{1}{4}\vec{c}$

$= 4\left(-\frac{1}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\right)$

$= 4\overrightarrow{PQ}.$



$\therefore$ CP : QP = 4 : 1.　$\therefore$ CQ : QP = 3 : 1.

略解

1. x = 5, y = 4

2. (1) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\vec{b}$, $\overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{5}{4}\vec{c}$, $\overrightarrow{AR} = \frac{5}{9}\vec{c}$　(2) PR : RQ = 4 : 5

3. (1) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{b}$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$　(2) $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$, CQ : QP = 3 : 1