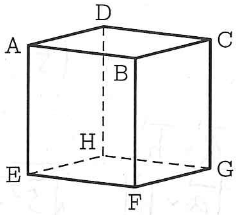
代数・幾何 I 小課題第 6 回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

2 年 M 科 ____ 番 氏名 ____________________

1. 右の図のような 1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH において、$\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{d}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{e}=\overrightarrow{AE}$ とするとき、次の問いに答えよ。



(1) 次のベクトルを $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ を用いて表わせ。

(a) $\overrightarrow{AF}$

$= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}$

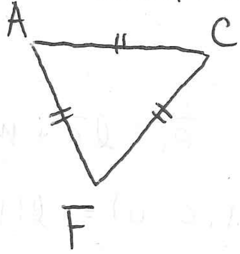
$= \vec{e}+\vec{b}$

(b) $\overrightarrow{AG}$

$= \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}$

$= (\vec{e}+\vec{b})+\vec{d} = \vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$

正三角形.



(c) $\overrightarrow{CH}$

$= \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}$

$= (-\vec{b})+\vec{e}$

$= -\vec{b}+\vec{e}$

(d) $\overrightarrow{BH}$

$= \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH}$

$= \vec{d}+(-\vec{b}+\vec{e})$

$= -\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$

(2) 次のベクトルの内積を求めよ。 $\cos\frac{\pi}{4}$

(a) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DH}$

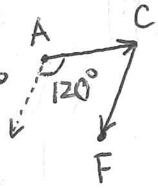
$= |\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{DH}|\cdot\cos 45^\circ$

$= \sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

(b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CF}$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 120^\circ$

$= -1$

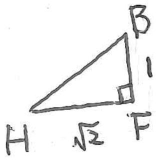


(3) $\overrightarrow{BH}$ と $\overrightarrow{AG}$ のなす角を θ とするとき、$\cos\theta$ の値を求めよ。

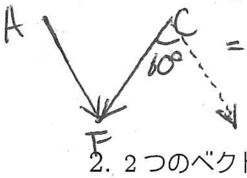
$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AG} = |\overrightarrow{BH}|\cdot|\overrightarrow{AG}|\cdot\cos\theta$

$1 = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{3}$



(c) $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AF}$



$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos 60^\circ$

$= 1$.

(d) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AG}$ (1)より

$= (-\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})\cdot(\vec{b}+\vec{d}+\vec{e})$

$= -|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2+|\vec{e}|^2$

$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{e}=\vec{e}\cdot\vec{b}=0$ を使う.

$= 1$

2. 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対して、

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) \qquad \text{ただし、} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \text{ とする。}$$

により定まるベクトルを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積という。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a} = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b} = 0$ となることを示せ。

$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3-a_3b_2, -a_1b_3+a_3b_1, a_1b_2-a_2b_1)$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a} = (a_2b_3-a_3b_2)a_1+(-a_1b_3+a_3b_1)a_2 + (a_1b_2-a_2b_1)a_3$

$= 0$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b} = (a_2b_3-a_3b_2)b_1+(-a_1b_3+a_3b_1)b_2 + (a_1b_2-a_2b_1)b_3$

$= 0$.

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が一次従属、すなわち、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行のとき、$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ となることを示せ。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行のとき, $\vec{b}=k\vec{a}$ と書けるから, $(b_1,b_2,b_3)=(ka_1,ka_2,ka_3)$.

$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2\cdot ka_2 - a_3\cdot ka_2,$
$-a_1\cdot ka_3 + a_3\cdot ka_1,$
$a_1\cdot ka_2 - a_2\cdot ka_1)$

$= (0, 0, 0)$.

$= \vec{0}$.

今日は裏にも問題があります！

$\vec{a}$と$\vec{b}$に直交するのが、$\vec{a}\times\vec{b}$ ((1)を見よう)

(3) 2つのベクトル $\vec{a}=(2,-2,1)$, $\vec{b}=(2,3,-4)$ の両方に直交する単位ベクトルを求めよ。

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (8-3, -(-8-2), 6+4)$$

$$= (5, 10, 10).$$

$$\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{5^2+10^2+10^2}}(5,10,10) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

∴ 求めるベクトルは、

$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

3. $\vec{a}=(1,1,0)$, $\vec{b}=(0,-1,2)$, $\vec{c}=(2,1,1)$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\vec{e_1}=(1,0,0)$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表わせ。

$\vec{e_1} = l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ とすると、

$$(1,0,0) = l(1,1,0)+m(0,-1,2)+n(2,1,1)$$

$$= (l+2n, l-m+n, 2m+n)$$

$$\therefore \begin{cases} l+2n=1 & \text{— ①} \\ l-m+n=0 & \text{— ②} \\ 2m+n=0 & \text{— ③} \end{cases}$$

①より、 $l=1-2n$

③より、 $m=-\frac{1}{2}n$

②に代入:

$$(1-2n)-\left(-\frac{1}{2}n\right)+n=0$$

$$-\frac{1}{2}n=-1$$

$$n=2$$

$$l=1-2\times2=-3$$

$$m=-\frac{1}{2}\times2=-1.$$

$$\therefore \vec{e_1}=-3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$$

(2) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ を求めよ。また、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{0^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,1,0)\cdot(0,-1,2)$$

$$=-1.$$

略解

1. (1) $\overrightarrow{AF}=\vec{b}+\vec{e}$, $\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$, $\overrightarrow{CH}=-\vec{b}+\vec{e}$, $\overrightarrow{BH}=-\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$ (2) $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DH}=0$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$, $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AF}=1$, $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AG}=1$ (3) $\cos\theta=\frac{1}{3}$

2. (1) 略 (2) 略 (3) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

3. (1) $\vec{e_1}=-3\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ (2) $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{5}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$