代数・幾何 I 小課題第 14 回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

2年 M 科 ____ 番 氏名 ____________________

1. 次の行列 X に対し、X = S + A となる対称行列 S と交代行列 A を求めよ。

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$S = \frac{1}{2}(X + {}^tX)$, $A = \frac{1}{2}(X - {}^tX)$ を計算すればよい。

$$S = \frac{1}{2}(X + {}^tX) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}(X - {}^tX) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 次を示せ。

${}^tX = X$ を示す。

${}^tX = -X$ を示す。

(1) 対称行列 S_1, S_2 の和 $S_1 + S_2$ は対称行列

$${}^t(S_1 + S_2) = {}^tS_1 + {}^tS_2$$

${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

$$= S_1 + S_2 \quad (\because S_1, S_2 : 対称)$$

(2) 交代行列 A_1, A_2 の和 $A_1 + A_2$ は交代行列

$${}^t(A_1 + A_2) = {}^tA_1 + {}^tA_2$$
$$= -A_1 - A_2$$
$$= -(A_1 + A_2)$$

(3) 対称行列 S と直交行列 P について、$P^{-1}SP$ は対称行列

$${}^t(P^{-1}SP) = {}^t(P^{-1} \cdot SP)$$

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$　　${}^t({}^tA) = A$.

P : 直交 $\Leftrightarrow$ ${}^tP = P^{-1}$

$$= {}^t(SP)\,{}^t(P^{-1})$$
$$= {}^tP\,{}^tS\,P = P^{-1}SP$$

3. 次の行列 X が直交行列であることを示せ。

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \cancel{0h} \end{pmatrix}$$

0

$$\rightarrow {}^tX = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

${}^tX$ が X の逆行列であることを示せばよい。

$${}^tXX = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = E$$

$$X\,{}^tX = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = E.$$

$\therefore$ ${}^tX$ は X の逆行列　$({}^tX = X^{-1})$

i.e. X は直交行列である。