★ 計算に使える行列式の性質

I.　2 つの行 (列) を入れ替えると、符号が変わる

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

(1 行目と 3 行目を入れ替え)

II.　1 つの行 (列) の成分の共通因数が行列式の外に出る

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 9 & 5 & 11 & 12 \\ 13 & 7 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

(2 列目の共通因数を前に出す)

III.　1 つの行 (列) の定数倍 $\neq 0$ を他の行 (列) に足しても、行列式の値は変わらない

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2-2\times 1 & 3-2\times 1 & 4-2\times 2 & 5-2\times 3 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

(1 行目を -2 倍して 2 行目に足す)

IV.　成分がすべて 0 の行 (列) があれば、行列式の値は 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 7 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 8 \\ 9 & 10 & 0 & 12 \\ 13 & 14 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

V.　1 つの行 (列) が 2 数の和になっているとき、行列式の和に分かれる

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a+\alpha & b+\beta & c+\gamma & d+\delta \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

(2 行目を行列式の和に分ける)

VI.　行列式のサイズダウン

$$\begin{vmatrix} c & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

(定数 c の下または右の成分がすべて 0 のとき使える)

★ 3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} \boxed{a_{11}} & & \\ & \boxed{a_{22}} & \\ & & \boxed{a_{33}} \end{array} + \begin{array}{ccc} & & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & & \\ & \boxed{a_{32}} & \end{array} + \begin{array}{ccc} & \boxed{a_{12}} & \\ & & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & & \end{array}$$
$$- \begin{array}{ccc} & & \boxed{a_{13}} \\ & \boxed{a_{22}} & \\ \boxed{a_{31}} & & \end{array} - \begin{array}{ccc} \boxed{a_{11}} & & \\ & & \boxed{a_{23}} \\ & \boxed{a_{32}} & \end{array} - \begin{array}{ccc} & \boxed{a_{12}} & \\ \boxed{a_{21}} & & \\ & & \boxed{a_{33}} \end{array}$$