

基礎数学α 小課題第7回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください!

1年 科 番氏名

1. 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c を定めよ。

(1) $a(x-1)^2 + b(x-1) + c = x^2 + x + 4$
 $a(x^2 - 2x + 1) + b(x-1) + c = x^2 + x + 4$
 $ax^2 + (-2a+b)x + (a-b+c) = x^2 + x + 4$

係数比較して、

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = 1 \\ a - b + c = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1, b = 3, \\ c = 6 \end{cases}$$

(3) $\frac{1}{x(x+4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+4}$ 両辺に $x(x+4)$ を掛ける
 $1 = a(x+4) + bx$
 $1 = (a+b)x + 4a$

係数比較: $\begin{cases} a+b=0 \\ 4a=1 \end{cases}$

$\therefore a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$

(5) $\frac{x^2 + 3x - 3}{(x+1)(x^2 - 2x + 2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2 - 2x + 2}$
 $x^2 + 3x - 3 = a(x^2 - 2x + 2) + (bx+c)(x+1)$
 $x^2 + 3x - 3 = (a+b)x^2 + (-2a+b+c)x + (2a+c)$

係数比較:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -2a+b+c=3 \\ 2a+c=-3 \end{cases}$$

$\therefore a = -1, b = 2, c = -1$

(2) $a(x-1)(x+2) + b(x+2)(x+4) + c(x+4)(x-1) = -2(x-1)$
 恒等式なので、 x にどんな値も代入しても等式が成立する
 $x=1$ を代入: $15b = 0$
 $b = 0$

$x=-2$: $-6c = 6$
 $c = -1$

$x=-4$: $10a = 10$
 $a = 1$

(1)と(2)に展開してO.K.

($a=1, b=0, c=-1$ とき、恒等式になる)

(4) $\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$
 $1 = a(x+3) + b(x-2)$
 $1 = (a+b)x + (3a-2b)$

係数比較: $\begin{cases} a+b=0 \\ 3a-2b=1 \end{cases}$

$\therefore a = \frac{1}{5}, b = -\frac{1}{5}$

(6) $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$ 両辺に $(x-1)(x-2)^2$ を掛ける
 $1 = a(x-2)^2 + b(x-1)(x-2) + c(x-1)$
 $1 = a(x^2 - 4x + 4) + b(x^2 - 3x + 2) + cx - c$
 $1 = (a+b)x^2 + (-4a-3b+c)x + (4a+2b-c)$

係数比較: $\begin{cases} a+b=0 \\ -4a-3b+c=0 \\ 4a+2b-c=1 \end{cases}$

$\therefore a = 1, b = -1, c = 1$

2. 整式 $P(x) = 3x^2 - x + 1$ を次の式で割ったときの余りを求めよ。

(1) $x-1$

(2) $x+2$

(3) $3x-1$

(余り) = $P(1) = 3 - 1 + 1 = 3$

(余り) = $P(-2) = 12 + 2 + 1 = 15$

(余り) = $P(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1 = 1$

剰余の定理

$P(x)$ を $ax+b$ で割ったときの余りは $P(-\frac{b}{a})$



今日は裏にも問題があります!

3. 整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると 1 余り、 $x+2$ で割ると -5 余る。 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

整式 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商と余りを $Q(x)$, $ax+b$ とすると、

$$P(x) = (x-1)(x+2)Q(x) + ax + b$$

$P(1) = 1$ より, $a+b = 1$ **Point!**
 $P(-2) = -5$ より, $-2a+b = -5$

$\therefore a = 2, b = -1$

求める余りは $2x-1$

因数定理

$P(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x-\alpha)Q(x)$
 $(Q(x): \text{整式})$

$P(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる。

4. 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3 + x^2 - 17x + 15$

$P(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$ とおくと、

$P(1) = 1 + 1 - 17 + 15 = 0$ より、

$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -17 & 15 \\ & & 1 & 2 & -15 \\ \hline & 1 & 2 & -15 & 0 \end{array}$$
 筆算でも
わかるよ。

$\therefore P(x) = (x-1)(x^2 + 2x - 15)$
 $= (x-1)(x+5)(x-3)$

(2) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ とおくと、

$P(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$ 。

$P(x)$ は $x+1$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$
 $= (x+1)(x-2)(x-3)$

(3) $x^3 + x^2 - 14x - 24$

$P(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24$ とおくと、

$P(-2) = -8 + 4 + 28 - 24 = 0$ 。

$P(x)$ は $x+2$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -14 & -24 \\ & & -2 & 2 & 24 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x) = (x+2)(x^2 - x - 12)$
 $= (x+2)(x-4)(x+3)$

(4) $x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10$

$P(x) = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10$ とおくと、

$P(1) = 1 - 3 - 11 + 3 + 10 = 0$ 。

$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -3 & -11 & 3 & 10 \\ & & 1 & -2 & -13 & 10 \\ \hline & 1 & -2 & -13 & 10 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x) = (x-1)(x^3 - 2x^2 - 13x - 10)$

$Q(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ とおくと、

$Q(-1) = -1 - 2 + 13 - 10 = 0$ 。

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -13 & -10 \\ & & -1 & 3 & 10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$
 $\therefore Q(x) = (x+1)(x^2 - 3x - 10)$
 $= (x+1)(x-5)(x+2)$

$\therefore P(x) = (x-1)(x+1)(x-5)(x+2)$

4. (1) $(x-1)(x+5)(x-3)$ (2) $(x+1)(x-2)(x-3)$ (3) $(x+2)(x+3)(x-4)$ (4) $(x-1)(x+1)(x-5)(x+2)$

3. $2x-1$

2. (1) 3 (2) 15 (3) 1

(5) $a = -1, b = 2, c = -1$ (6) $a = 1, b = -1, c = 1$

1. (1) $a = 1, b = 3, c = 6$ (2) $a = 1, b = 0, c = -1$ (3) $a = \frac{4}{1}, b = -\frac{4}{1}$ (4) $a = \frac{5}{1}, b = -\frac{5}{1}$