基礎数学α 小課題第８回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

１年 ___ 科 ___ 番 氏名 ______________

1. 次の方程式を解け。

(1) $27x^3 - 1 = 0$

$(3x-1)(9x^2+3x+1)=0$

$9x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-36}}{18}$

$=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{18}$

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{6}$

∴ 解は

$x=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{6}$

(2) $x^4 - x^2 - 6 = 0$

$(x^2-3)(x^2+2)=0$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{2}i$

(3) $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$

$P(x)=x^3-3x^2+x-3$ とおくと，

$P(3)=27-27+3-3=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \underline{|0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-3)(x^2+1)$

∴ 解は $x=3,\ \pm i$

(4) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$

$P(x)=x^3+5x^2+8x+4$ とおくと，

$P(-2)=-8+20-16+4=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 5 & 8 & 4 \\ & & -2 & -6 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \underline{|0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)(x^2+3x+2)$

$=(x+2)(x+2)(x+1)$

$=(x+2)^2(x+1)$

(5) $2x^3 - 5x^2 + 12x - 5 = 0$

$P(x)=2x^3-5x^2+12x-5$ とおくと，

$P(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+6-5=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & -5 & 12 & -5 \\ & & 1 & -2 & 5 \\ \hline & 2 & -4 & 10 & \underline{|0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-\frac{1}{2})(2x^2-4x+10)$

$=(2x-1)(x^2-2x+5)$

$x^2-2x+5=0 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{1-5}$

$=1\pm2i$

∴ 解は $x=\frac{1}{2},\ 1\pm2i$

2. 3次方程式 $x^3 + ax^2 + 33x + b = 0$ の解の１つが $4 - i$ であるとき、実数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

$x=4-i$ を代入すると，等式を満たすことを利用：

$(4-i)^2=16-8i+i^2=15-8i$

$(4-i)^3=(4-i)(15-8i)=60-47i+8i^2$

$=52-47i$

$(4-i)^3+a(4-i)^2+33(4-i)+b=0$

$(52-47i)+a(15-8i)+(132-33i)+b=0$

$(184+15a+b)+(-80-8a)i=0$

$\therefore \begin{cases} 184+15a+b=0 \\ -80-8a=0 \end{cases}$

$a+bi=0 \Leftrightarrow a=b=0$

$\rightarrow\ a=-10,\ b=-34$

$x^3-10x^2+33x-34=0$

$P(x)=x^3-10x^2+33x-34$ とおくと，

$P(2)=8-40+66-34=0$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -10 & 33 & -34 \\ & & 2 & -16 & 34 \\ \hline & 1 & -8 & 17 & \underline{|0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-8x+17)$

$x^2-8x+17=0 \Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{16-17}$

$=4\pm i$

∴ 他の解は $x=2,\ 4+i$

(別解) $4-i$ が解となるので，$4+i\ (=\overline{4-i})$ も解となる。$\alpha=4-i,\ \beta=4+i$ を解にもつ２次方程式は，$\alpha+\beta=8,\ \alpha\beta=16-i^2=17$ より，

$x^2-8x+17=0$. $x^3+ax^2+33x+b$ は $x^2-8x+17$ で割り切れるから，

$$\begin{array}{rrr|rrrr} & & & 1 & a+8 & & \\ \hline 1 & -8 & 17 & 1 & a & 33 & b \\ & & & 1 & -8 & 17 & \\ \hline & & & & a+8 & 16 & b \\ & & & & a+8 & -8a-64 & 17a+136 \\ \hline & & & & & 8a+80 & -17a+b-136 \end{array}$$

$\therefore \begin{cases} -8a+80=0 \\ -17a+b+136=0 \end{cases}$

3. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき、次を示せ。

(1) $\dfrac{a^2+b^2}{b^2}=\dfrac{c^2+d^2}{d^2}$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと、$a=kb$, $c=kd$

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=\frac{k^2b^2+b^2}{b^2}-\frac{k^2d^2+d^2}{d^2}$$

$$=(k^2+1)-(k^2+1)$$

$$=0$$

$\therefore$ (左辺) = (右辺) ☑

(2) $\dfrac{2a-5c}{2b-5d}=\dfrac{c}{d}$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと、$a=kb$, $c=kd$.

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=\frac{2kb-5kd}{2b-5d}-\frac{c}{d}$$

$$=\frac{k(2b-5d)}{2b-5d}-\frac{kd}{d}$$

$$=k-k$$

$$=0.$$

$\therefore$ (左辺) = (右辺) ☑

4. $a>b>0$ のとき、$a^2>b^2$ となることを証明せよ。

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=a^2-b^2$$

$$=(a+b)(a-b)$$

$a>b>0$ より, $a+b>0$, $a-b>0$.

$\therefore\ (a+b)(a-b)>0$

$\therefore$ (左辺) > (右辺) ☑

5. 実数 a, b が $a^2+b^2=0$ を満たすとき、$a=b=0$ となることを示せ。

$b^2=-a^2$ で、$a^2\geqq 0$ だから、

$b^2\leqq 0$. また、$b^2\geqq 0$ ← 平方の性質1.

だから、$b^2=0$. $\therefore\ b=0$.

これより、$a^2=0$ となるから、$a=0$. ☑

実数の平方の性質

a, b : 実数

1. $a^2\geqq 0$.
   特に、$a^2=0 \Leftrightarrow a=0$
2. $a^2+b^2\geqq 0$
   特に、$a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0$

略解

1. (1) $x=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{6}$ (2) $x=\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{2}i$ (3) $x=3$, $\pm i$ (4) $x=-1$, -2 (5) $x=\dfrac{1}{2}$, $1\pm 2i$
2. $a=-10$, $b=-34$. 他の解は $4+i$, 2
3. 略
4. (ヒント: $a-b>0$ となるから…)
5. (ヒント: $a^2\geqq 0$ であるから…)