基礎数学α 小課題第9回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

1年 ___ 科 ___ 番 氏名 ____________

1. (1) $a > b > 0$ のとき、$\dfrac{a}{a+1} > \dfrac{b}{b+1}$ となることを証明せよ。

← (左辺) − (右辺) > 0 となることを示せばよい。

(左辺) − (右辺)

$$= \frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1}$$

$$= \frac{a(b+1)}{(a+1)(b+1)} - \frac{b(a+1)}{(a+1)(b+1)}$$

$$= \frac{a-b}{(a+1)(b+1)}$$

$a>b>0$ より, $a-b>0$, $a+1>0$, $b+1>0$ となるから, $\dfrac{a-b}{(a+1)(b+1)} > 0$.

ゆえに, (左辺) > (右辺). ☐

(2) 任意の正の実数 a, b, x, y について、

√ を含む不等式は (左辺)^2 − (右辺)^2 が基本

$$\sqrt{ax+by}\sqrt{x+y} \geq \sqrt{a}x + \sqrt{b}y$$

となることを証明せよ。

(左辺)^2 − (右辺)^2 $= (ax+by)(x+y) - (\sqrt{a}x+\sqrt{b}y)^2$

$= ax^2+bxy+axy+by^2 - (ax^2+2\sqrt{ab}xy+by^2)$

$= xy(a+b-2\sqrt{ab})$

$= xy(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$x>0$, $y>0$ より, $xy(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

∴ (左辺)^2 ≧ (右辺)^2

(左辺) > 0, (右辺) > 0 だから,

(左辺) ≧ (右辺) ☐

(3) $a > 0$, $b > 0$ のとき、$\dfrac{3a}{5b} + \dfrac{5b}{3a} \geq 2$ となることを証明せよ。また、等号成立はいつか。

$a>0$, $b>0$ より, $\dfrac{3a}{5b}>0$, $\dfrac{5b}{3a}>0$.

相加平均と相乗平均の関係より,

$$\frac{3a}{5b}+\frac{5b}{3a} \geq 2\sqrt{\frac{3a}{5b}\times\frac{5b}{3a}} = 2$$

等号成立は $\dfrac{3a}{5b} = \dfrac{5b}{3a}$ のとき.

$(3a)^2 = (5b)^2$

$(3a-5b)(3a+5b) = 0$

$a>0$, $b>0$ より, $3a+5b>0$.

∴ $3a-5b=0$.

すなわち, 等号成立は $3a=5b$ のとき. ☐

相加平均と相乗平均の関係

$A>0$, $B>0$ のとき,
$A+B \geq 2\sqrt{AB}$
等号成立は $A=B$ のとき

(4) $x > 0$, $y > 0$ のとき、$\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\left(y+\dfrac{9}{y}\right) \geq 24$ となることを証明せよ。また、等号成立はいつか。

$x>0$, $y>0$ より, $\dfrac{4}{x}>0$, $\dfrac{9}{y}>0$.

相加相乗より,

$x+\dfrac{4}{x} \geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}} = 4$ —①

$y+\dfrac{9}{y} \geq 2\sqrt{y\cdot\dfrac{9}{y}} = 6$ —②

∴ $\left(x+\dfrac{4}{x}\right)\left(y+\dfrac{9}{y}\right) \geq 24$

等号成立は①と②の等号が成立するときだから, $x=\dfrac{4}{x}$ かつ $y=\dfrac{9}{y}$ のとき.

$x^2=4$　　$y^2=9$.

$x>0$, $y>0$ より, 等号成立は $x=2$, $y=3$ のとき ☐

(5) $x > 0$, $y > 0$ のとき、$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{9}{x}\right) \geq 16$ となることを証明せよ。また、等号成立はいつか。

(左辺) $= xy+9+1+\dfrac{9}{xy}$

$= xy+\dfrac{9}{xy}+10$.

ここで, $xy>0$, $\dfrac{9}{xy}>0$ より,

相加相乗を適用して,

$xy+\dfrac{9}{xy} \geq 2\sqrt{xy\cdot\dfrac{9}{xy}} = 6$ …(*)

∴ (左辺) ≧ 6+10 = 16.

等号成立は (*) の等号が成立するときだから, $xy=\dfrac{9}{xy}$ のとき.

$xy>0$ より, 等号成立は $xy=3$ のとき ☐

Remark

(4) のように,

$x+\dfrac{1}{y} \geq 2\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

$y+\dfrac{9}{x} \geq 2\sqrt{y\cdot\dfrac{9}{x}} = 6\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ とすると,

$\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{9}{x}\right) \geq 12$

となり失敗する. これは示したい不等式より, 弱い主張である.

今日は裏にも問題があります！

2. $a>0,\ b>0$ とするとき、$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab}$ となることを証明せよ。また、等号成立はいつか。

$a>0,\ b>0$ より, $\frac{1}{a}>0,\ \frac{1}{b}>0$.

相加相乗より,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} = \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

$$\therefore\ \sqrt{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

等号成立は $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ のとき, すなわち, $a=b$ のとき. □

$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\left(=\dfrac{2ab}{a+b}\right)$ を調和平均という.

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

(調和) ≦ (相乗) ≦ (相加)

の関係が成り立つことになる.

(下の を参照のこと)

3. $a>1$ のとき、$a+\dfrac{1}{a-1}$ の最小値を求めよ。ヒント：相加平均と相乗平均の関係

$$a+\frac{1}{a-1} = 1+(a-1)+\frac{1}{a-1}$$

$a>1$ より, $a-1>0$, $\frac{1}{a-1}>0$.

相加相乗より,

$$(a-1)+\frac{1}{a-1} \ge 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}} = 2$$

$$\therefore\ a+\frac{1}{a-1} \ge 1+2=3. \quad \cdots(*)$$

等号成立は $a-1=\frac{1}{a-1}$ のとき.

$(a-1)^2=1$

$a-1=\pm1$

$a=1\pm1=2,\ 0$.

$a>1$ より, $a=2$.

すなわち, $a=2$ のとき, $a+\frac{1}{a-1}$ は最小値3をとる.

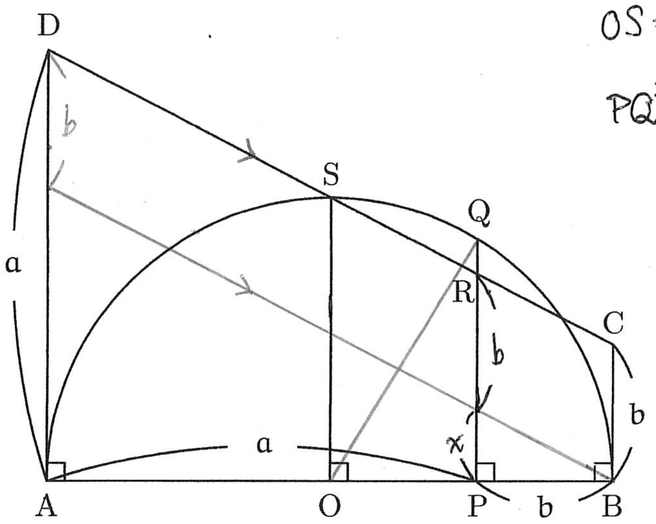
Remark

(*)で最小値が3とするのは早合点.

$x^2+1\ge0$ だが, $y=x^2+1$ の最小値は1. 0ではないですね.

$a+\frac{1}{a-1}\ge3$ でも実際に, $a+\frac{1}{a-1}$ が3をとるかはまだ分からないのです.

半円 O を描き、両端を A, B とする。図のように、線分 OB 上に点 P を取り、AP $=a$, PB $=b$ とする ($a\ge b$)。図のように、AD $=a$, BC $=b$ となるように台形 ABCD を描くとき、線分 OS, PQ, PR の長さをそれぞれ a, b を用いて表わせ。



OS = (半円Oの半径) = $\frac{a+b}{2}$

$$PQ^2 = OQ^2 - OP^2$$
$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$= \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$
$$= ab. \qquad \therefore\ PQ=\sqrt{ab}$$

図で, $x : a-b = b : a+b$

$$x = \frac{ab-b^2}{a+b}$$

$$\therefore\ PR = x+b = \frac{ab-b^2}{a+b}+\frac{ab+b^2}{a+b} = \frac{2ab}{a+b}$$

上の図より, PR ≦ PQ ≦ OS であるが, これは

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

ということで, 調和・相乗・相加平均の大小関係を図形的に表わしたものである.