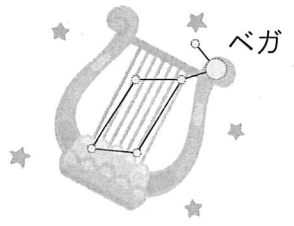


基礎数学α 小課題第 14 回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください!

1 年 ___ 科 ___ 番氏名 _____

1. 天体の明るさを測る“等級”という単位は、こと座のベガ(シタのおりひめ星)を等級 0 とすると、 Pogson の式



$$m = -2.5 \log_{10} \frac{I}{I_V}$$

により定義される。ここで、 m と I は天体の等級と明るさをそれぞれ表し、 I_V はベガの明るさを表わす。このとき、

- (1) ベガの明るさの 10^{-1} 倍 (すなわち、 $I = I_V \cdot 10^{-1}$)、 10^{-2} 倍、 10^{-3} 倍の明るさである天体の等級はそれぞれいくつか?

10^{-1} 倍のとき $I = I_V \cdot 10^{-1}$ だから、

$$m = -2.5 \log_{10} 10^{-1} = 2.5$$

同様に、

$$m = -2.5 \log_{10} 10^{-2} = 5.0$$

$$m = -2.5 \log_{10} 10^{-3} = 7.5$$

- (2) 1 等星はベガの何倍の明るさか? (教科書巻末の対数表を用いて値を求めるとなお良い)

$m = 1$
 $1 = -2.5 \log_{10} \frac{I}{I_V}$
 $-\frac{2}{5} = \log_{10} \frac{I}{I_V}$
 $\frac{I}{I_V} = 10^{-\frac{2}{5}}$
 $\therefore 10^{-\frac{2}{5}} \text{ 倍}$

対数表より、 $\log_{10} 2.51 = 0.3997$
 だから、 $(\frac{I}{I_V})^{-1} \doteq 2.51$
 $\frac{I}{I_V} \doteq 0.398$

2. 地震が発するエネルギー E [J] (ジュール) とマグニチュード M との関係は $\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$ で表される*1。マグニチュードが 1 だけ変化するとき、エネルギーは元のおよそ何倍になるか?

マグニチュード M_0 のときのエネルギーを E_0 、

$M_0 + 1$ のときのエネルギーを E とすると、

$$\log_{10} E_0 = 4.8 + 1.5M_0$$

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5(M_0 + 1)$$

$$\therefore \log_{10} E - \log_{10} E_0 = 1.5$$

$$\log_{10} \frac{E}{E_0} = 1.5$$

$$\frac{E}{E_0} = 10^{\frac{3}{2}} \doteq 3$$

約 3 倍

3. 水溶液中の水素イオン H^+ のモル濃度 [mol/L] を $[H^+]$ と表わすとき、pH(水素イオン指数)は $pH = -\log_{10} [H^+]$ により与えられる。また、 $[H^+]$ は $[H^+] = cm\alpha$ (c : 溶液のモル濃度、 m : 酸の価数、 α : 電離度*2) により計算できる。このとき、

- (1) 1.0×10^{-3} [mol/L] の塩酸 HCl の pH を求めよ。ただし、HCl の電離度を 1 とする。

$$[H^+] = 1.0 \times 10^{-3} \times 1 \times 1 = 10^{-3}$$

$$pH = -\log_{10} [H^+] = -\log_{10} 10^{-3} = 3.0$$

- (2) (1) の溶液を 2 倍に薄めた溶液の pH を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

2 倍に薄めると濃度は半分になるから、

$$[H^+] = \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$pH = -\log_{10} (\frac{1}{2} \times 10^{-3}) = \log_{10} 2 + 3.0 \doteq 3.3$$

- (3) 1.0×10^{-3} [mol/L] の酢酸 CH_3COOH の pH を求めよ。ただし、 CH_3COOH の電離度を 0.01 とする。

$$[H^+] = 1.0 \times 10^{-3} \times 1 \times 0.01 = 10^{-5}$$

$$pH = -\log_{10} 10^{-5} = 5.0$$

今日は裏にも問題があります!

*1 理科年表 平成 29 年, p.722

*2 溶解している酸・塩基の量に対する、電離している酸・塩基の量の割合。HCl などの強酸はほぼ 1 に近い: $HCl \rightleftharpoons H^+ + Cl^-$ (ほぼ右辺の状態) 一方で、酢酸のような弱酸は電離度が小さい: $CH_3COOH \rightleftharpoons H^+ + CH_3COO^-$ (ほぼ左辺の状態)

4. 次の式を簡単にせよ。

$$(1) \log_{10} 10\sqrt{10} \\ = \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} \\ = \frac{3}{2}$$

$$(3) \log_2 2048 \\ = \log_2 2^{11} \\ = 11$$

$$(5) 4\log_2 \sqrt{6} - 2\log_2 3 \\ = 2\log_2 6 - 2\log_2 3 \\ = 2(\log_2 3 + 1) - 2\log_2 3 \\ = 2 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \log_2 2 \end{matrix}$$

$$(7) \log_2 40 + \log_2 3 - \log_2 15 \\ = \log_2 8 \cdot 5 + \log_2 3 - \log_2 3 \cdot 5 \\ = (3 + \log_2 5) + \log_2 3 - (\log_2 3 + \log_2 5) \\ = 3$$

$$(9) \log_2 12 + \log_2 6 - 2\log_2 3 \\ = (\log_2 3 + 2) + (\log_2 3 + 1) - 2\log_2 3 \\ = 3 \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \log_2 4 & \log_2 2 \end{matrix}$$

$$(11) \log_9 27 \\ = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} \\ = \frac{3}{2}$$

$$(13) \log_4 81 \times \log_{27} 2 \\ = \frac{\log_2 81}{\log_2 4} \times \frac{\log_2 2}{\log_2 27} \\ = \frac{4\log_2 3}{2} \times \frac{1}{3\log_2 3} \\ = \frac{2}{3}$$

底の変換

$$\log_a M = \frac{\log_c M}{\log_c a}$$

↑
底を何に
変えよかは
式を見て判断

カクニツ

$$(2) \log_{\frac{1}{3}} 81 \\ = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \\ = -4$$

$$(4) 3^{\log_3 5} = X \text{ とおくと,} \\ \log_3 5 = \log_3 X \\ \therefore X = 5$$

$$3^r = M \\ \Leftrightarrow r = \log_3 M$$

$$(6) 3\log_3 \frac{1}{6} - \log_3 \frac{3}{4} + \log_3 12 \\ = -3(\log_3 2 + 1) - (1 - \log_3 4) + (\log_3 4 + 1) \\ = -3\log_3 2 - 3 - 1 + 2\log_3 2 + 2\log_3 2 + 1 \\ = -3 + \log_3 2$$

$$(8) \log_3 \frac{4}{3} + \log_3 \sqrt[3]{24} - \frac{3}{2}\log_3 12 \\ = (\log_3 4 - \log_3 3) + \frac{1}{3}\log_3 3 \cdot 8 - \frac{3}{2}\log_3 3 \cdot 4 \\ = (2\log_3 2 - 1) + \frac{1}{3}(1 + 3\log_3 2) - \frac{3}{2}(1 + 2\log_3 2) \\ = -\frac{13}{6}$$

$$(10) \log_3 \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log_3 \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\log_3 \sqrt[3]{6} \\ = \frac{1}{2}\log_3 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_3 6 \\ = \frac{1}{2}\log_3 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\log_3 2 + 1) \\ = -1$$

$$(12) \log_{\sqrt{2}} 8 \\ = \frac{\log_2 8}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

$$(14) \log_8 64 + \log_4 27 - \log_2 \frac{2}{3} \\ = \frac{\log_2 64}{\log_2 8} + \frac{\log_2 27}{\log_2 4} - (\log_2 2 - \log_2 3) \\ = \frac{6}{3} + \frac{3\log_2 3}{2} - (1 + \log_2 3) \\ = 1 + \frac{5}{2}\log_2 3$$

4. (1) $\frac{3}{2}$ (2) -4 (3) 11 (4) 5 (5) 2 (6) $\log_3 2 - 3$ (7) 3 (8) $-\frac{6}{13}$ (9) 3 (10) -1 (11) $\frac{7}{3}$ (12) 6 (13) $\frac{3}{2}$ (14) $1 + \frac{5}{2}\log_2 3$ (15) $1 + \frac{2\log_2 3}{5}$

2. 10^5 倍 = 3 倍
1. (1) 2.5 等量、5 等量、7.5 等量 (2) $10^{-\frac{1}{2}}$ 倍 = 0.4 倍