基礎数学α 小課題第 24 回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！各問題の類題もあわせて示すようにしてみました。例・例題 と 節末 は教科書の該当する章の例・例題と節末問題を、14 などは問題集の番号を示しています。この課題の問題が解けなかったら教科書の例・例題に戻って確認、また、試験前には類題 (例の下にある練習問題も) も解いてみると良いでしょう。*

加法定理： $\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha$

この方向で使う

$A\sin\theta+B\cos\theta$ の形

1. 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし、$r>0,\ -\pi<\alpha\leq\pi$ とする。例 3, 節末 5, 315

(1) $\sin\theta+\cos\theta$

$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ でくくる。

$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる α を探す $\longrightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{4}$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

加法定理の逆*

(2) $\sqrt{6}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta$

$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$ でくくる。

$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$

$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha=\frac{1}{2}$ となる α を探す $\longrightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{6}$

$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

加法定理の逆

2. 次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta-\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし、$r>0,\ -\pi<\alpha\leq\pi$ とする。例 3, 節末 5, 315

$\sin\theta-\cos\theta$

$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\theta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha=-\frac{\pi}{4}$ とすればよい.

$=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\theta\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

(2) 方程式 $\sin\theta-\cos\theta=1\ (0\leq\theta<2\pi)$ を解け。324, 299

$\sin\theta-\cos\theta=1$

$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leq\theta<2\pi$ より, $-\frac{\pi}{4}\leq\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(-\frac{\pi}{4}\leq\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi\right)$

$\Leftrightarrow\ \theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

$\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\pi}{2},\ \pi$.

半角公式

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta$

$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta$

3. 次の問いに答えよ。

(1) 半角の公式を用いて、$\cos\frac{\pi}{8},\ \cos\frac{\pi}{16},\ \cos\frac{\pi}{32}$ を求めよ。312

$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$

$\cos^2\frac{\pi}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$

$\therefore\ \cos\frac{\pi}{16}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$

$\cos^2\frac{\pi}{32}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{16}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$

$\therefore\ \cos\frac{\pi}{32}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}$

(2) n を 2 以上の自然数とするとき、半径 1 の円に内接する正 2^n 多角形の面積 S_n を $\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$ を用いて表わせ。また、2 倍角の公式 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ を用いて、S_n を $\cos\frac{\pi}{2^k}$ $(2 \le k \le n-1)$ を用いて表わせ。

正2^n角形の
2^n等分

$$S_n = 2^n \times \underbrace{\frac{1}{2}\times 1 \times 1 \times \sin\frac{2\pi}{2^n}}_{\text{左の三角形の面積}}$$

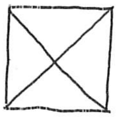
$$= 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$$

2倍角公式より,

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \times \frac{1}{\cos\alpha} \quad \cdots(*)$$

(これを繰り返し使う)

$n=2$



$\frac{2\pi}{2^2} = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\frac{\pi}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{n-2}} \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{n-3}} \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}}\right)\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}$$

$$= \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2^{n-4}} \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n-3}}}\right)\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}}\sin\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^2}\times\cos\frac{\pi}{2^3}\times\cdots\times\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}$$

(3) n をどんどん大きくすると、S_n は半径 1 の円の面積 $(=\pi)$ に近づくことから、Viète(ヴィエト)の公式

$$\pi = \cfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}\cdots\cdots}$$

を導け。

((2)続き) $\therefore\ S_n = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}$

また, $\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}$ より, $\cos\frac{\pi}{2^{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}}$.

$\cos\frac{\pi}{64} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{32}}$ などと分かる.

また, 半径1の円の面積はπで, nをどんどん大きくすると, S_nはπに近づく:

$$\pi = \frac{1}{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{64}\cdots\cdots}$$

$$= \cfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}\cdots\cdots}$$

(これを途中で打ち切ると π の近似値を得る:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{64}\cos\frac{\pi}{128}\cos\frac{\pi}{256}} = 3.14151380\ldots$$

略解

1. (1) $\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$　(2) $2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$
2. (1) $\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$　(2) $\theta = \frac{\pi}{2}, \pi$
3. (1) $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$, $\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$, $\cos\frac{\pi}{32} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}$　(2) $S_n = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$, $S_n = \dfrac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}$

(3) n をどんどん大きくすると、S_n は半径 1 の円の面積に近づくから、$\pi = \dfrac{2}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cdots}$ (無限の積) と思える。