

## 小テスト第1回

1. この数列が収束することは自明ですが、不等式の示し方に慣れるのを目的として出題しています。まず、いくつか数列を計算してみると、 $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = \frac{2}{3}$ ,  $a_3 = \frac{3}{4}$ , ... 単調増加になりそうです。実際、

$$a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} = a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

となるから、単調増加。また、 $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$  より、

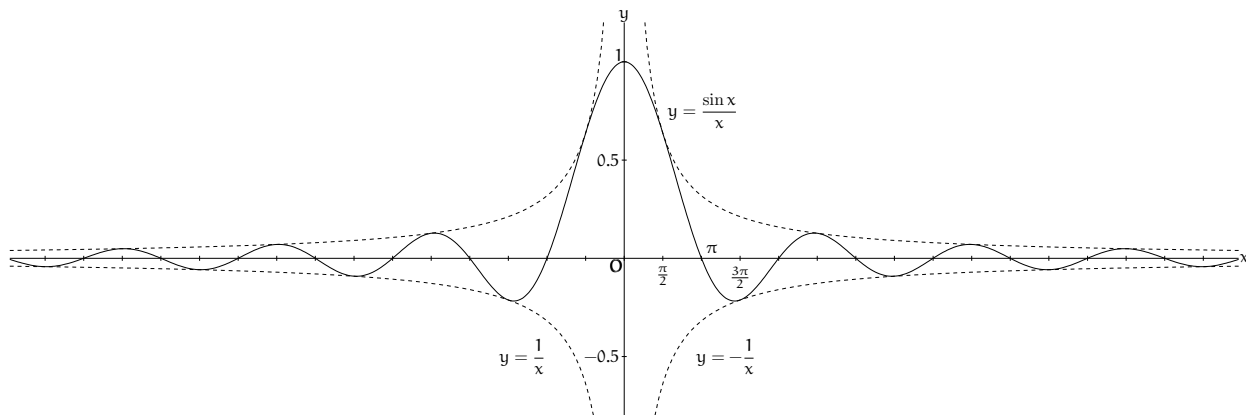
$$\frac{1}{2} = a_1 \leq a_n < 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

となるので、有界です。

2. (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(n+2) - (n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}.$
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \dots + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$

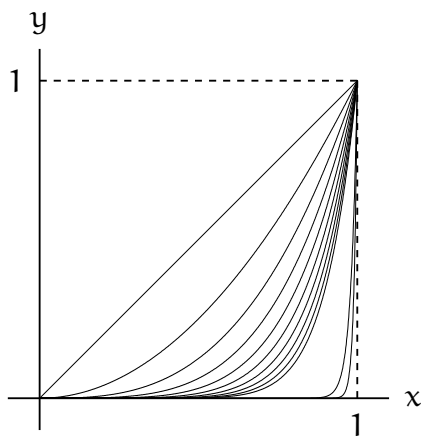
## 小テスト第2回

1. (a)  $-1 \leq \sin x \leq 1$  だから、 $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) となる。 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  と、はさみうちの定理 (原理) から、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$  となる。また、 $0 \leq \sin x \leq 1$  から、 $0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) としてもよい。この場合は、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$  より従う。



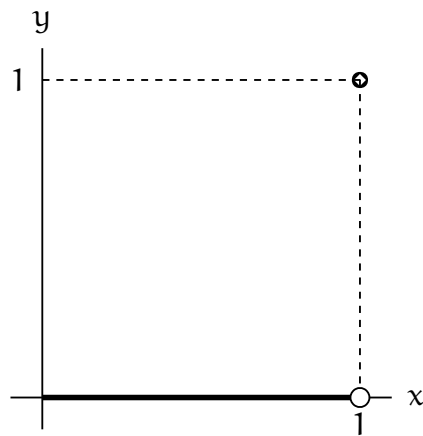
- (b) 片側極限を求めてみる。 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ 。左側極限と右側極限が一致しないので、極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$  は存在しない。

2.  $0 \leq x < 1$  のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$  となるから、 $f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$  となる。各  $0 < a < 1$  に対し、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = f(a)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$  となるから、関数  $f$  は区間  $[0, 1)$  上で連続となる。しかし、 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \neq f(1)$  となるから、点  $x = 1$  において  $f$  は連続ではない。標語的に言えば、**連続関数の“極限”は連続関数とは限らない。**



$n = 1, \dots, 10, 50, 100$  について、 $y = x^n$  を描いたもの

$n \rightarrow \infty$



$y = f(x)$  を描いたもの

---

## 講義の参考書等

### ▷ ゼロから学ぶ微分積分 (小島寛之、講談社)

微分積分学が直感的にわかりやすく書かれた本。ときおり挟まれる対話により、微分積分学で湧き上がる疑問点にも答えている。微分も知らぬまま読んだ高校生のときには、微分積分が魔法のように見えた。微分積分学の誕生期であるニュートン・ライプニッツの時代もそうだったのだろう。

### ▷ 解析入門 (小平邦彦、岩波書店)

微分積分学の本格的で明快な教科書。 $\epsilon$ - $\delta$  論法になれないとつらい部分があるかも。

### ▷ 微分積分学入門 (黒田紘敏さんによる電子テキスト)

他の微分積分学の本と違い、具体例が豊富で証明も丁寧。 $\epsilon$ - $\delta$  論法の独習にも良いと思う。入手先は  
[http://www7b.biglobe.ne.jp/~h-kuroda/pdf/text\\_calculus.pdf](http://www7b.biglobe.ne.jp/~h-kuroda/pdf/text_calculus.pdf)