小テスト第 6・7 回解答　2015/06/01

小テスト第 6 回

1. $f(x) = x^3$ $(x \in [a, b])$ に平均値の定理を適用すると、$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ を満たす $c \in (a, b)$ が存在する。$f'(x) = 3x^2$ より、$b^3 - a^3 = 3c^2(b - a)$ となる。したがって、$c = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 + ab + a^2}{3}}$ を得る。

2. (a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ を何回か微分すればよい。

$$f'(x) = \frac{-(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\left((1-x)^2\right)'}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-2\left((1-x)^3\right)'}{(1-x)^6} = \frac{3!}{(1-x)^4}$$

となるから、$f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ と予想できる。これを帰納法で示せばいい。

または、$(1-x)f(x) = 1$ と変形して、両辺を n (≥ 1) 回微分する：

$$(1-x) \cdot f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} \cdot (-1) \cdot f^{(n-1)}(x) = 0$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{n}{1-x} f^{(n-1)}(x) \\ &= \frac{n}{1-x} \cdot \frac{n-1}{1-x} f^{(n-2)}(x) \\ &= \frac{n}{1-x} \cdot \frac{n-1}{1-x} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{1-x} f^{(1)}(x) \\ &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \end{aligned}$$

として計算することもできる。

(b) $f^{(n)}(0) = n!$ より、f の $x = 0$ における n 次多項式近似は

$$\begin{aligned} f(x) &\fallingdotseq f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2!}f''(0)\,x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\,x^n \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n. \end{aligned}$$

また、剰余項は

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(c)\, x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(1-\theta x)^{n+2}} \quad \bigl(c = \theta x \ (0 < \theta < 1)\bigr)$$

と書ける。

小テスト第 7 回

$f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$ の導関数を求めて、多項式近似を計算するのは大変。ここでは、$\dfrac{1}{1+Y}$ の多項式近似に、$Y = \sin x$ の多項式近似を代入することで計算してみる。まず、$f(x)$ の 4 次多項式近似を求めるので、$\dfrac{1}{1+Y}$ の 4 次多項式近似

$$\frac{1}{1+Y} \fallingdotseq 1 - Y + Y^2 - Y^3 + Y^4$$

を使えばよい (5 次以上の項は必要ない)。これを求めるには、$\dfrac{1}{1+Y}$ を微分して計算するのも良いし、小テスト第 6 回の結果 $\dfrac{1}{1-x} \fallingdotseq 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ に、$x = -Y$ を代入すればよい。

また、$Y = \sin x \fallingdotseq x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5$ なので (これは覚えてなくとも、微分してすぐにわかるでしょう)、

$$\begin{aligned} f(x) &\fallingdotseq 1 - Y + Y^2 - Y^3 + Y^4 \\ &= 1 - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5\right) + \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right)^2 - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right)^3 + \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right)^4 \\ &= 1 - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) + \left(x^2 - \frac{2}{3!}x \cdot x^3 + \cdots\right) - \left(x^3 + \cdots\right) + \left(x^4 + \cdots\right) \\ &\fallingdotseq 1 - x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^4. \end{aligned}$$