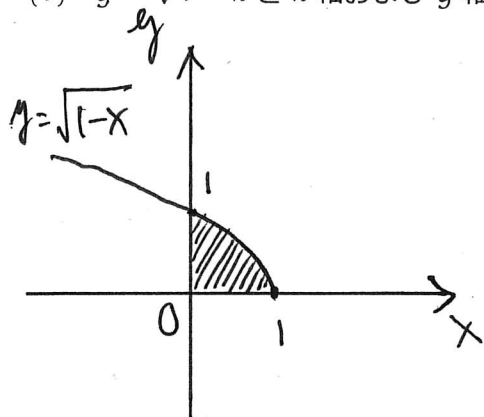


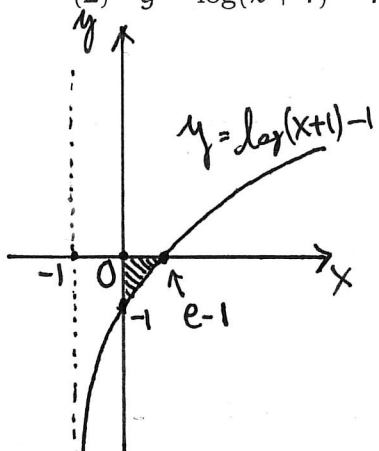
補充問題

(1)* $y = \sqrt{1-x}$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \sqrt{1-x} dx & t &= 1-x \\ & & dt &= -dx \\ &= \int_1^0 \sqrt{t} \cdot (-dt) & & \\ &= \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt & \int_a^b = -\int_b^a & \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(2)* $y = \log(x+1) - 1$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。



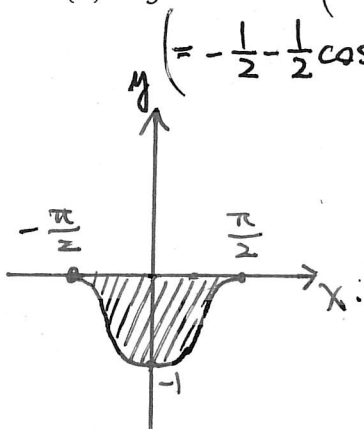
x 軸との交点: $0 = \log(x+1) - 1$
 $1 = \log(x+1)$
 $\Leftrightarrow e^1 = x+1$
 $x = e-1$

対数と指数の関係

$$r = \log M \Leftrightarrow e^r = M$$

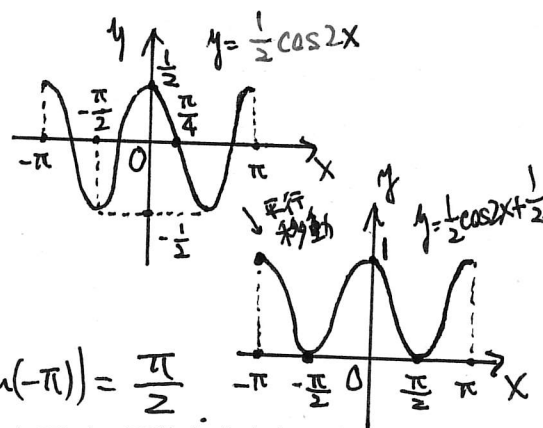
$$(r = \log_a M \Leftrightarrow a^r = M)$$

(3)** $y = -\cos^2 x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。



$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -(-\cos^2 x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{1}{4} (\sin \pi - \sin(-\pi)) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{e-1} (0 - (\log(x+1) - 1)) dx \\ &= -\int_0^{e-1} \log(x+1) dx + \int_0^{e-1} 1 dx \\ &= -\int_0^{e-1} (x+1)' \log(x+1) dx + [x]_0^{e-1} \\ &= -[(x+1) \log(x+1)]_0^{e-1} + \int_0^{e-1} (x+1) \cdot \frac{dx}{x+1} \\ &\quad + (e-1) \\ &= -e + [x]_0^{e-1} + e-1 \\ &= e-2. \end{aligned}$$



(4)** $y = \log x$ と点 $(0, 1)$ を通るこの曲線の接線、 x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

接線を求める。

接点を $(a, \log a)$ とおくと、

$$y' = \frac{1}{x} \xrightarrow{x=a} \frac{1}{a} \text{ (接線の傾き)}$$

$$\text{接線: } y - \log a = \frac{1}{a} (x - a)$$

$(0, 1)$ を通るから、

$$1 - \log a = \frac{1}{a} (0 - a)$$

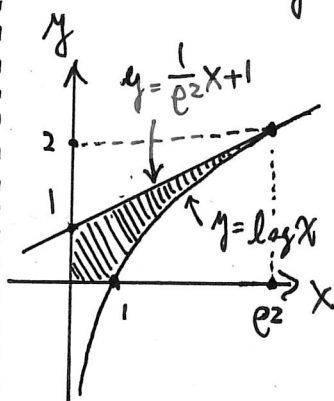
$$\log a = 2$$

$$\Leftrightarrow a = e^2$$

$$\therefore \text{接点は } (e^2, \log e^2) = (e^2, 2)$$

$$\text{接線は } y - \log e^2 = \frac{1}{e^2} (x - e^2)$$

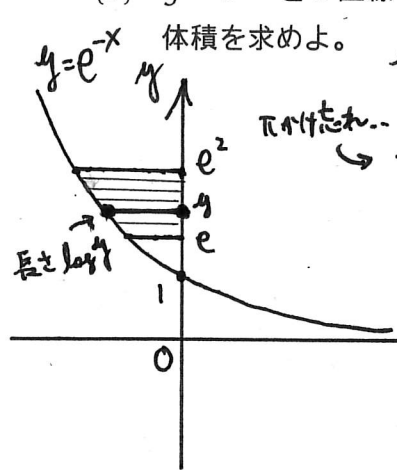
$$y = \frac{1}{e^2} x + 1$$



$$\begin{aligned} S &= \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{e^2} x + 1 - \log x \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2e^2} x^2 + x - x \log x \right) \Big|_1^{e^2} \\ &= \left(\frac{1}{2e^2} e^4 + e^2 - e^2 \log e^2 \right) - \left(\frac{1}{2e^2} + 1 - 1 \log 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} e^2 - 1 \end{aligned}$$

計算大変!!

(5)* $y = e^{-x}$ と 2 直線 $y = e$, $y = e^2$ および y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。



$$y = e^{-x} \Leftrightarrow \log y = -x$$

$$\frac{V}{\pi} = \int_e^{e^2} (\log y)^2 dy$$

$$= \int_e^{e^2} (y)' (\log y)^2 dy$$

$$x = \left[y (\log y)^2 \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} y \cdot 2 \log y \cdot \frac{1}{y} dy$$

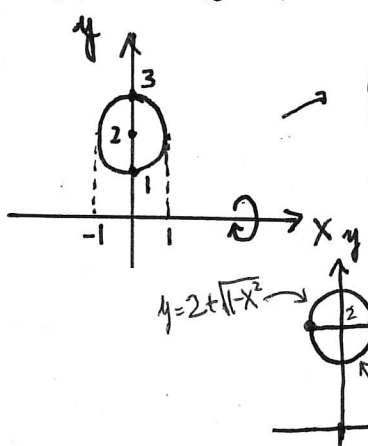
$$= \left(e^2 (\log e^2)^2 - e (\log e)^2 \right) - 2 \int_e^{e^2} \log y dy$$

$$\begin{aligned} &= 4e^2 - e - 2 \int_e^{e^2} (y)' \log y dy \\ &= 4e^2 - e - 2 \left[y \log y \right]_e^{e^2} + 2 \int_e^{e^2} y \cdot \frac{1}{y} dy \\ &= 4e^2 - e - 2(e^2 \log e^2 - e \log e) \\ &\quad + 2 \left[y \right]_e^{e^2} \end{aligned}$$

$$= 4e^2 - e - 2(2e^2 - e) + 2(e^2 - e)$$

$$= 2e^2 - e$$

(6)** $x^2 + (y-2)^2 = 1$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。



$$V = \pi \int_{-1}^1 (2 + \sqrt{1-x^2})^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (2 - \sqrt{1-x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^1 (2 + \sqrt{1-x^2})^2 dx - \pi \int_{-1}^1 (2 - \sqrt{1-x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^1 8\sqrt{1-x^2} dx$$

$$= 8\pi \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= 4\pi^2$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

(7)*** 右図のように、半径が a の円 O があり、 P を AB 上の点とし、線分 AB に垂直な弦 QR を取る。円板 O に垂直で点 P を通る直線上に点 S があり、 $\triangle QRS$ が正三角形となっているとする。このとき、点 P を A から B まで動かすとき、正三角形 SQR が通過してできる立体の体積を求めよ。

P の x 座標を x とすると、

$$PQ = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad SP = PQ \tan 60^\circ = \sqrt{3(a^2 - x^2)}$$

$$\triangle SRQ = \frac{1}{2} \cdot RQ \cdot SP = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{3(a^2 - x^2)} = \sqrt{3}(a^2 - x^2)$$

$$\therefore V = \int_a^{-a} \sqrt{3}(a^2 - x^2) dx$$

$$= \sqrt{3} \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_a^{-a}$$

$$= \sqrt{3} a^2 (a + a) - \frac{\sqrt{3}}{3} (a^3 + a^3)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} a^3$$

