微分積分Ⅰ　小課題第３回

裏面にある略解をもとに丸付けをすること。裏面も解答に使ってもよいです。授業の質問も書いてくれれば回答します。名前等、忘れずにていねいに書いてください！

２年 ＿＿ 科 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k+1)$

$= \sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$

$= \sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}1$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n$

$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-6\}$

$= \frac{1}{6}n(2n^2+3n-5)$

$= \frac{1}{6}n(n-1)(2n+5)$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$

$= 3\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}2$

$= 3\times\frac{1}{2}n(n+1)-2n$

$= \frac{1}{2}n\{3(n+1)-4\}$

$= \frac{1}{2}n(3n-1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(3^{k-1}-2^k)$

$a_k=2^k$ ← 初項2，公比2

$a_k=3^{k-1}$ ← 初項1，公比3

$= \sum_{k=1}^{n}3^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}2^k$

$= \frac{1\cdot(1-3^n)}{1-3} - \frac{2(1-2^n)}{1-2}$

$= \frac{1}{2}(3^n-1)+2(1-2^n)$

$= \frac{1}{2}\cdot 3^n - 2^{n+1} + \frac{3}{2}$

(4) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)$

$= \sum_{k=1}^{n}(k^3-k)$

$= \sum_{k=1}^{n}k^3 - \sum_{k=1}^{n}k$

$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)-2\}$

$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2)$

$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n-1)$

(5) $\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2-2k)$　（第 $(n-1)$ 項までの和であることに注意）

$= 3\sum_{k=1}^{n-1}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1}k$

$= 3\cdot\frac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(2n-1) - 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$

$= \frac{1}{2}n(n-1)\{(2n-1)-2\}$

$= \frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)$

(6) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$

裏へ．

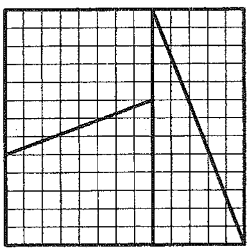
nを$n-1$に変える

$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ より，$\sum_{k=1}^{n-1}k^2 = \frac{1}{6}(n-1)\cdot((n-1)+1)\cdot(2(n-1)+1) = \frac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)$

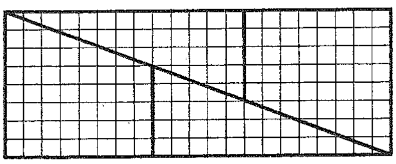
『不思議の国のアリス』の作者であるLewis Carroll（ルイス キャロル）のお気に入りだったパズル：

左図のように、13×13 の正方形が２つの台形と２つの三角形に分割されている。これを組み直して右図のように 8×21 の長方形にする。ところが、この両者の面積を比較すると・・・組み直しただけなのに、どうして両者の面積が違うのだろうか？（実は各辺の長さがFibonacci（フィボナッチ）数列の項であることが関係している）

出典：Concrete Mathematics，p293



組み直し →



邦題：コンピュータの数学

フィボナッチ数列

$a_1=a_2=1$,

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

は等式

$\underbrace{a_{n+2}a_n}_{長方形} - \underbrace{a_{n+1}^2}_{正方形} = (-1)^n$

を満たすから，長方形と正方形の面積が1だけずれる．フィボナッチ数列の項ならなんでもよい．

実は

の傾きが一致していない．

（三角形の傾き）$= \frac{13}{5}$

（台形の傾き）$= \frac{8}{3}$

1.(6) $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{a}{2k-1} + \dfrac{b}{2k+1}$ とおいて、

$$= \frac{a(2k+1)+b(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \frac{(2a+2b)k+(a-b)}{(2k-1)(2k+1)}$$

係数を比較して、 $\begin{cases} 2a+2b=0 \\ a-b=1 \end{cases}$ $\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}.$

$$\therefore\ \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right\}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left\{1 - \frac{1}{2n+1}\right\}$$

$$= \frac{n}{2n+1}.$$

略解

1. (1) $\frac{1}{6}n(n-1)(2n+5)$ (2) $\frac{1}{2}n(3n-1)$ (3) $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}3^n-2^{n+1}$ (4) $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n-1)$
(5) $\frac{1}{2}n(n-1)(2n-3)$ (6) $\frac{n}{2n+1}$